

Hoofdstuk 4

Analytische Meetkunde

4.1 Enkele stellingen uit de lineaire algebra.

4.1.1 Coördinaten in een vectorruimte

Laat V een n -dimensionale vectorruimte¹ zijn over een lichaam L .

Vectoren in V stellen wij voor door letters met een pijltje er boven: \vec{a}, \vec{x} . Kiezen wij in V een basis $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \dots, \vec{e}^n$, dan zijn er n lineaire functies $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ in V , zodat voor iedere vector \vec{x} geldt: $\vec{x} = \xi_1(\vec{x})\vec{e}^1 + \xi_2(\vec{x})\vec{e}^2 + \dots + \xi_n(\vec{x})\vec{e}^n$. Wij schrijven x_i in plaats van $\xi_i(\vec{x})$, evenzo a_i in plaats van $\xi_i(\vec{a})$, enz. Dan is $\vec{x} = x_1\vec{e}^1 + \dots + x_n\vec{e}^n$. Door $\vec{x} \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ is een isomorfe afbeelding van V op L^n gegeven. x_1, \dots, x_n heten de *coördinaten* van \vec{x} t.o.v. de basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$. Kiezen wij een andere basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$ dan heeft \vec{x} t.o.v. deze basis coördinaten x'_1, \dots, x'_n . Stel $\vec{u}^k = \sum_{i=1}^n s_{ik}\vec{e}^i$, ($k = 1, \dots, n$). Dan is

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n x'_k \vec{u}^k = \sum_{k=1}^n x'_k \sum_{i=1}^n s_{ik} \vec{e}^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n s_{ik} x'_k \vec{e}^i.$$

Ook geldt $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}^i$. Hieruit volgt:

$$x_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} x'_k \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.1)$$

De coördinatentransformatie (4.1) kan ook geschreven worden als matrixvergelijking

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

waarin S de $n \times n$ -matrix met elementen s_{ik} voorstelt.

4.1.2 Coördinatentransformatie

Laat α een lineaire afbeelding van V op zichzelf zijn; zij $\alpha(\vec{x}) = \vec{y}$. Ten opzichte van een basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ wordt α voorgesteld door vergelijkingen van de vorm $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$, of in

¹vectorruimte, dat is de lineaire ruimte als op bladzijde 90

matrixvorm

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

waarin A de $n \times n$ -matrix met elementen a_{ik} voorstelt. Gaan we door de coördinatentransformatie (4.2) op de basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$ over, dan vinden wij

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = S^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S^{-1} A S \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Ten opzichte van de basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$ wordt α dus gegeven door

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

waarin $B = S^{-1} A S$

4.1.3 Een bilineaire functie

Laat φ een *bilineaire functie* in V zijn. Ten opzichte van de basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ wordt φ gegeven door $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k$. Hierin is $a_{ik} = \varphi(\vec{e}^i, \vec{e}^k)$. Wij kunnen dit weer met behulp van matrices schrijven:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Hierin is A de matrix met elementen a_{ik} en A heet de matrix van φ ten opzichte van de basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$.

Wij gaan door de coördinatentransformatie (4.2) over op de basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$. Uit (4.2) volgt

$$(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) S^T$$

(4.5) geeft dus

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (x'_1, \dots, x'_n) S^T A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1, \dots, x'_n) S^T A S \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Bij gevolg wordt φ ten opzichte van de basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$ gegeven door

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (x'_1, \dots, x'_n) C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

waarin

$$C = S^T A S. \quad (4.6)$$

Opmerking 4.1.1. De bilineaire functie φ is dan en slechts dan *symmetrisch*² als de matrix A symmetrisch is. Hieruit volgt: is A symmetrisch, dan is ook C symmetrisch. (Dit volgt ook gemakkelijk uit (4.6); ga dit na).

De verzameling W_φ der vectoren \vec{y} , waarvoor geldt dat $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ voor iedere vector \vec{x} , is een lineaire deelruimte van V . Is $n - r$ de dimensie van W_φ , dan heet r de *rang* van φ .

Stelling 4.1.2. De rang van φ is gelijk aan de rang³ van A .

Bewijs:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i y_k.$$

$$y \in W \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.7)$$

Is r de rang van A , dan heeft de beeldruimte van A de dimensie r en de nulruimte van A de dimensie $n - r$. Ook W , oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen (4.7), heeft dus de dimensie $n - r$ en de rang van φ is dus r . \square

Opmerking 4.1.3. Is A de matrix van een bilineaire functie φ ten opzichte van de basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$, en C de matrix van φ ten opzichte van de basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$ dan is de rang van A gelijk aan de rang van C .

4.1.4 De Euclidische ruimte

Wij nemen nu voor L het lichaam \mathbb{R} der reële getallen. Een *Euclidische vectorruimte* E is een vectorruimte, waarin een symmetrische bilineaire functie φ gegeven is met de eigenschap, dat de diagonaalfunctie $\varphi^*(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x})$ positief definit⁴ is. Deze $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ die de Euclidische ruimte definieert, wordt het *inproduct* van \vec{x} en \vec{y} genoemd en geschreven als (\vec{x}, \vec{y}) .

$\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = |\vec{x}|$ heet de *lengte* van \vec{x} . De vectoren \vec{x} en \vec{y} heten *loodrecht op elkaar* als $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Een basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ waarvoor geldt

$$\begin{cases} |\vec{e}^i| = 1 & (i = 1, \dots, n) \\ (\vec{e}^i, \vec{e}^j) = 0 & (i, j = 1, \dots, n; i \neq j) \end{cases} \quad (4.8)$$

heet *orthonormaal*.

Is $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ een willekeurige basis, dan geldt

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}^i, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}^j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (\vec{e}^i, \vec{e}^j). \quad (4.9)$$

Hieruit volgt: Dan en slechts dan als de basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ orthonormaal is, geldt

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (4.10)$$

² φ heet symmetrisch als $\forall_{\vec{y}, \vec{x}} \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$.

³De rang van een matrix is de dimensie van de beeldruimte van de matrix, d.w.z. het is de het maximaal aantal lineair onafhankelijke kolomvectoren.

⁴ $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ heet positief definit als $\forall_{\vec{x} \in E} \varphi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ en $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

of in matrixvorm

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Is $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$ een tweede orthonormale basis, dan vinden wij met behulp van (4.2)

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x'_1, \dots, x'_n) S^T S \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Daar $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$ een orthonormale basis is, geldt ook

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x'_1, \dots, x'_n) \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Bij gevolg is $S^T S = I$ (de eenheidsmatrix) en dus:

$$S^T = S^{-1}, \quad S^T S = S S^T. \quad (4.12)$$

Een matrix S , die aan (4.12) voldoet, heet orthogonaal. Wij hebben dus de

Stelling 4.1.4. De matrix van de coördinatentransformatie, waardoor wij van een orthonormale basis op een andere orthonormale basis overgaan, is *orthogonaal*.

4.1.5 Eigenwaarden van een kwadratische functie

Stelling 4.1.5. Laat in de Euclidische vectorruimte E een *kwadratische functie* ψ^* gegeven⁵ zijn. Er is steeds een orthonormale basis, ten opzichte waarvan

$$\psi^*(\vec{x}) = \psi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Hierin zijn $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van het *symmetrisch endomorfisme* σ waarvoor geldt $\psi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \sigma \vec{y})$. En $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ zijn eigenvectoren, behorende bij de eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Bewijs: De operator $\sigma : E \rightarrow E$ is een symmetrische en begrensde operator en de ruimte E is eindig-dimensionaal. De operator σ is dus compact. Dan volgt deze stelling direct uit Stelling 3.9.50 uit het hoofdstuk Lineaire Analyse. \square

Opmerking 4.1.6. Met Ψ geven we de matrixrepresentatie aan van σ voor een willekeurige orthonormale basis. Op deze basis is $\vec{x} = (x'_1, \dots, x'_n)$ en $\vec{y} = (y'_1, \dots, y'_n)$. Dan is $\psi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k,l} x'_k \Psi_{k,l} y'_l$, zodat $\psi^*(\vec{x}) = \sum_{k,l} x'_k \Psi_{k,l} x'_l$. De stelling beweert nu dat een orthonormale basis is waarvoor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ waarvoor $\psi^*(\vec{x}) = \sum_{i,j} x_i \Lambda_{ij} x_j$ waarbij Λ de diagonaalmatrix is met elementen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. De transformatie tussen de twee orthonormale bases wordt beschreven door (4.2) zodat $\psi^*(\vec{x}) = \sum_{k,l} x'_k \Psi_{k,l} x'_l = \sum_{i,j} x_i \Lambda_{ij} x_j = \sum_{i,j,k,l} x_k S_{ki}^T \Lambda_{ij} S_{jl} x'_l$.

In matrix-vorm beweert de stelling dus dat voor een symmetrische matrix Ψ er een orthonormale matrix S is zodat $\Psi = S^T \Lambda S$, waarin Λ een diagonaalmatrix is.

⁵Een kwadratische functie is een functie ψ^* , waarvoor $\psi^*(\vec{x}) = \psi(\vec{x}, \vec{x})$ met ψ een symmetrische bilineaire functie.

Opmerking 4.1.7. Men kan de stelling ook als volgt formuleren. Laat in de ruimte E twee kwadratische functies φ^* en ψ^* gegeven zijn, waarvan φ^* positief definitief is. Dan kan men steeds een basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ vinden, ten opzichte waarvan tegelijk geldt

$$\begin{aligned}\varphi^*(\vec{x}) &= x_1^2 + \dots + x_n^2. \\ \psi^*(\vec{x}) &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.\end{aligned}$$

Stelling 4.1.8. Is A de matrix van een bilineaire functie φ ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ en is C de matrix van φ ten opzichte van de orthonormale basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$, dan geldt $\det A = \det C$.

Bewijs:⁶ Volgens (4.6) is $C = S^T A S$. Dus $\det C = \det S^T \cdot \det A \cdot \det S = (\det S)^2 \det A$. Daar S orthogonaal is, is $\det S = \pm 1$. \square

Stelling 4.1.9. Zijn A , C en φ als in Stelling 1, dan hebben A en C dezelfde eigenwaarden.

Bewijs: De eigenwaarden van A zijn de eigenwaarden van het endomorfisme σ , waarvoor geldt $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \sigma \vec{y})$. Hetzelfde geldt voor de eigenwaarden van C .

Tweede bewijs: De eigenwaarden van C zijn de wortels van $\det(C - \lambda I) = 0$.

$C - \lambda I = S^T A S - \lambda I = S^{-1} A S - \lambda I = S^{-1} (A - \lambda I) S$.

$\det(C - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$. Hieruit volgt het gestelde direct. \square

4.2 Kwadratische vormen

4.2.1 Invariantie van het karakter onder transformaties

Een kwadratische functie f in de n -dimensionale Euclidische ruimte E_n wordt ten opzichte van een oorsprong O en een orthonormale basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ gegeven door

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{j=1}^n a_{0j} x_j + a_{00}. \quad (4.13)$$

Voeren wij een andere orthonormale basis in, dan wordt f gegeven door

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} x'_i x'_k + \sum_{j=1}^n b_{0j} x'_j + b_{00}. \quad (4.14)$$

Volgens stelling 4.1.8 is $\det(a_{ik}) = \det(b_{ik})$. Een verandering van O in P wordt gegeven door $x_i = x''_i + p_i$, ($i = 1, \dots, n$). Hierdoor gaat (4.13) over in

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x''_i x''_k + \sum_{j=1}^n c_{0j} x''_j + c_{00}. \quad (4.15)$$

Hierbij verandert de matrix (a_{ik}) niet. Wij vinden zo

Stelling 4.2.1. De determinant van de matrix van een kwadratische functie in E_n is invariant tegenover verandering van oorsprong en overgang op een andere orthonormale basis.

⁶Gebruikt: (1) $\det(AB) = \det A \det B$, en (2) Als S orthogonaal dan $\det S = \pm 1$.

4.2.2 De homogene kwadratische vorm

Wij maken het rechterlid van (4.13) homogeen door toevoeging van een factor x_0 of x_0^2 zodat

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,k=0}^n a_{ik} x_i x_k. \quad (4.16)$$

Evenzo handelen wij met het rechterlid van (4.14) en van (4.15).

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,k=0}^n b_{ik} x'_i x'_k. \quad (4.17)$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,k=0}^n c_{ik} x''_i x''_k. \quad (4.18)$$

In het rechterlid van (4.16) staat een kwadratische functie van $n + 1$ veranderlijken. De matrix hiervan stel ik voor door A^0 . Evenzo is B^0 de matrix van het rechterlid van (4.17) en C^0 die van het rechterlid van (4.18).

De overgang van (4.16) naar (4.17) heeft plaats door

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \text{waarin} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

en S orthogonaal is. Hieruit volgt $\det T = 1$. Analoog aan Stelling 4.1.8 geldt nu $\det B_0 = \det A_0$. De overgang van (4.16) naar (4.18) heeft plaats door

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x''_0 \\ x''_1 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix}, \quad \text{waarin} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & & & \\ \vdots & & I & \\ p_n & & & \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Hieruit volgt $\det U = 1$. Bijgevolg is $\det C^0 = \det A^0$.

Stelling 4.2.2. Voert men in een Euclidische ruimte een andere oorsprong en een andere orthonormale basis in, dan blijven de determinant van de matrix van het kwadratische gedeelte uit het rechterlid van (4.13) (de kleine matrix) en de determinant van de matrix van de homogeen gemaakte functie (4.16) (de grote matrix) invariant. Verder zijn de eigenwaarden van de kleine matrix invariant. Ook de rang zowel van de kleine als van de grote matrix is invariant.

4.2.3 De standaard kwadratische vorm

Iedere kwadratische functie in de n -dimensionale Euclidische ruimte kan door geschikte keuze van oorsprong en orthonormale basis op een der volgende vormen gebracht worden:

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + a \quad (4.21)$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + 2b x_{r+1}. \quad (4.22)$$

In beide gevallen wordt ondersteld $\lambda_i \neq 0$, ($n = 1, 2, \dots, r$). In (4.22) is bovendien $b > 0$. Het getal r is de rang van het kwadratische deel van f . De bewering volgt nu direkt uit Stelling 4.1.5. Als één of meer eigenwaarden $\lambda = 0$ optreden, kan er een lineair of een constant deel van de kwadratische vorm overblijven. Het lineaire deel bevindt zich in de nulruimte van de operator σ en is onafhankelijk van de eerste r eigenwaarden.

4.3 Kegelsneden in het platte vlak

Voor $n = 2$ geven (4.21) en (4.22) de onderstaande gevallen. De verzameling der punten, waarin de kwadratische functie de waarde 0 heeft, is een *kegelsnede* γ .

I	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + a, \quad a \neq 0$	γ is een <i>ellips</i> ($\lambda_1 \lambda_2 > 0, a < 0$), een <i>hyperbool</i> ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$) of γ heeft geen reëel punt ($\lambda_1 \lambda_2 > 0, a > 0$) (nuldelige kegelsnede).
II	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$	γ is ontaard in twee snijdende lijnen ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$) of bestaat uit slechts één punt ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$).
III	$\lambda_1 x_1^2 + a, \quad a \neq 0$	γ is ontaard in twee evenwijdige lijnen ($a \lambda_1 < 0$) of γ heeft geen reëel punt ($a \lambda_1 > 0$).
IV	$\lambda_1 x_1^2,$	γ is ontaard in twee samenvallende lijnen.
V	$\lambda_1 x_1^2 + 2bx_2, \quad b \neq 0$	γ is een <i>parabool</i> .

Is ten opzichte van zekere basis

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00}, \tag{4.23}$$

dan is de rang van A en van A^0 gelijk aan die na reductie tot de vorm (4.21) of (4.22). In onderstaande tabel is deze rang voor elk der vijf gevallen aangegeven. Met behulp daarvan kan men van de vorm (4.23) direct nagaan, in welk geval de kegelsnede verkeert (Ga dit na).

Geval	I	II	III	IV	V
Rang A	2	2	1	1	1
Rang A^0	3	2	2	1	3

Om de uitzonderingsgevallen onder II en III te vermijden, kan men als grondlichaam voor de Euclidische ruimte het lichaam \mathbb{C} der complexe getallen nemen. De bilineaire functie, die het inproduct levert, wordt zo gekozen, dat zijn diagonaal positief definitief is voor de reële waarden der veranderlijken. Verder beschouwen wij alleen kwadratische functies met reële coëfficiënten. Hoewel dit standpunt niet consequent is, heeft het praktische voordelen.

Geval II en geval III worden dan:

II: γ is ontaard in twee snijdende lijnen, reëel of toegevoegd complex.

III: γ is ontaard in twee evenwijdige lijnen, reëel of toegevoegd complex.

Een orthogonale matrix met determinant 1 heeft voor $n = 2$ de gedaante

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

zodat de overgang op een andere orthonormale basis plaats heeft door de substitutie

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha, \\ x_2 &= x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Bij invullen in $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ wordt de coëfficiënt van x_1x_2 :

$$-2a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + 2a_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2a_{22} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Deze coëfficiënt is nul als $\tan(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$. (Ga dit na).

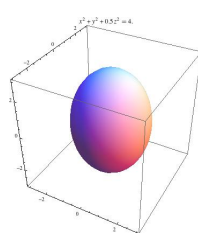
4.4 Omwentelingsoppervlakken

$P(p_1, O, p_3)$ ligt in het XOZ-vlak en $Q(q_1, q_2, q_3)$ ontstaat uit P door draaiing om de Z-as over een hoek φ . Dan zijn de coördinaten van Q : $(q_1, q_2, q_3) = (p_1 \cos \varphi, p_1 \sin \varphi, p_3)$. Omgekeerd is $p_{1,2} = \pm \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, $q_3 = p_3$. Ligt P op de kromme $f(x_1, x_3) = 0$, dan ligt Q op het oppervlak $f(\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) = 0$. Ligt omgekeerd Q op dit oppervlak, dan is er een φ te vinden, zodat P op $f(x_1, x_3) = 0$ ligt.

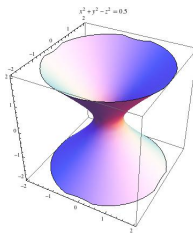
Voorbeeld 4.4.1. $z = mx$, rechte in het XOZ-vlak, levert $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$, kegel. In het algemeen geeft een kromme van de n -de graad aanleiding tot een *omwentelingsoppervlak omwentelingsoppervlak* van de graad $2n$, tenzij in $f(x_1, x_3)$ de x_1 alleen tot even machten voorkomt. Meetkundig betekent dit, dat de kromme symmetrisch t.o.v. de Z-as is.

We krijgen *omwentelingskwadrieken* door de kegelsneden om de Z-as te wentelen.

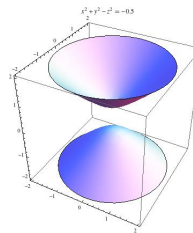
Kegelsnede	Vergelijking	Kwadriek	Vergelijking
Ellips	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	omwentelingsellipsoïde	$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hyperbool	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	éénbladige omwentelingshyperboloïde of omwentelingshalsvlak	$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hyperbool	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	tweebladige omwentelingshyperboloïde of omwentelingstweeblad	$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Parabool	$\frac{x^2}{a^2} = 2z$	tweebladige omwentelingsparaboloïde of vaas	$\frac{x^2+y^2}{a^2} = 2z$



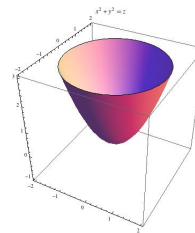
Ellipsoïde



Halsvlak



Tweeblad



Ellipsvaas

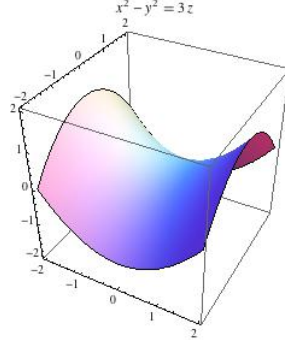
4.5 Algemene tweedegraadsoppervlakken

Door op bovengenoemde omwentelingskwadrieken de transformatie $x = x'$, $y = \frac{b}{a}y'$ en $z = z'$ toe te passen, krijgt men meer algemene tweedegraadsoppervlakken. Het resultaat is:

Ellipsoïde	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Eénbladige hyperboloïde (halsvlak)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Tweebladige hyperboloïde (tweeblad)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Elliptische paraboloïde (ellipsvaas)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$

De doorsneden van het laatste oppervlak met vlakken $y = c$ zijn congruente parabolen, waarvan de toppen liggen op de parabool $x = 0, y^2 = 2b^2z$.

Laat men op analoge wijze de parabool $x^2 = 2a^2z, y = 0$ met zijn top langs de parabool $y^2 = -2b^2z, x = 0$ glijden, dan ontstaat de *hyperbolische paraboloid* (zadelvlak), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.



Het halsvlak is te schrijven als:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{of} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (4.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right) & \text{(a)} \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right) & \text{(b)} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \sigma \left(1 + \frac{y}{b}\right) & \text{(a)} \\ \sigma \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \rho \left(1 - \frac{y}{b}\right) & \text{(b)} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Als de coördinaten van een punt P voor zekere waarden van λ (ρ) en μ (σ) aan (4.25) of (4.26) voldoen, dan voldoen zij ook aan (4.24). Aangezien (4.25) en (4.26) voor gegeven λ, ρ, μ en σ rechte lijnen voorstellen, liggen op het halsvlak twee stelsels rechte lijnen. Voor deze stelsels gelden de volgende uitspraken:

1. Twee lijnen uit eenzelfde stelsel kruisen elkaar.

Bewijs: Beschouw twee lijnen uit hetzelfde stelsel

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \mu_1 \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \lambda_1 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \text{(a)}, \quad \left. \begin{aligned} \lambda_2 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \mu_2 \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \lambda_2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \text{(b)}. \quad (4.27)$$

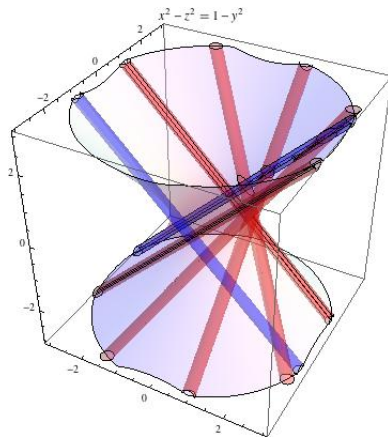
(4.25.a) stelt een vlakkenwaaier voor met drager

$$p : \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad 1 + \frac{y}{b} = 0,$$

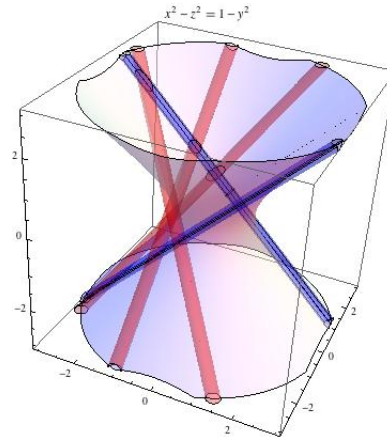
(4.25.b) stelt een vlakkenwaaier voor met drager

$$q : \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad 1 - \frac{y}{b} = 0.$$

De dragers p en q zijn kruisende lijnen, naar gemakkelijk meetkundig is in te zien; (4.27.a) is een lijn, die p en q snijdt en ook (4.27.b) is een lijn die p en q snijdt. Dus kruisen (4.27.a) en 4.27.b) elkaar. \square



Situatie (4.25),
Dragers (blauw) en
lijnen in het halsvlak (rood).



Situatie (4.26),
Dragers (blauw) en
lijnen in het halsvlak (rood).

2. Twee lijnen uit verschillende stelsels snijden elkaar of zijn evenwijdig.

Bewijs: Zij

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) &= \mu_1 \left(1 + \frac{y}{b} \right) \\ \mu_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) &= \lambda_1 \left(1 - \frac{y}{b} \right) \end{aligned} \right\} \text{(a)}, \quad \left. \begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) &= \sigma_1 \left(1 + \frac{y}{b} \right) \\ \sigma_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) &= \rho_1 \left(1 - \frac{y}{b} \right) \end{aligned} \right\} \text{(b)} \quad (4.28)$$

en lijn uit (4.24), resp. (4.25). Vermenigvuldig de vergelijkingen (4.28.a) met σ_1 , resp. ρ_1 en tel op. Dit geeft:

$$(\lambda_1 \sigma_1 + \mu_1 \rho_1) \frac{x}{a} + (\lambda_1 \rho_1 - \mu_1 \sigma_1) \frac{y}{b} + (\lambda_1 \sigma_1 - \mu_1 \rho_1) \frac{z}{c} = (\lambda_1 \rho_1 + \mu_1 \sigma_1). \quad (4.29)$$

Dit is een vlak uit de vlakkenwaaier met drager (4.28.a). Vermenigvuldig de vergelijkingen (4.28.b) met μ_1 resp. λ_1 en tel op. Dit geeft weer het vlak (4.29). Dit is nu een vlak uit de vlakkenwaaier met drager (4.28.b). Dus liggen (4.28.a) en (4.28.b) in eenzelfde vlak (4.29). \square

3. Door ieder punt van het halsvlak gaat een lijn van het stelsel (4.25) en een lijn van het stelsel (4.26).
4. Aan iedere lijn van (4.25) loopt één lijn van (4.26) evenwijdig. (Spiegelen in O .)

Opmerking 4.5.1. Op het zadelvlak liggen de stelsels rechten

$$\left. \begin{aligned} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) &= 2\mu \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) &= \lambda z \end{aligned} \right\} \text{(a)}, \quad \left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) &= 2\sigma \\ \sigma \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) &= \rho z \end{aligned} \right\} \text{(b)} \quad (4.30)$$

Hiervoor gelden analoge eigenschappen; een lijn uit (4.30.a) kan echter nooit evenwijdig zijn met een lijn uit (4.30.b). De lijnen uit (4.30.a) zijn evenwijdig met het vlak $\frac{a}{x} + \frac{y}{b} = 0$, en die uit (4.30.b) met $\frac{a}{x} - \frac{y}{b} = 0$ (*richtvlakken*).

4.6 Kegels en Cylinders

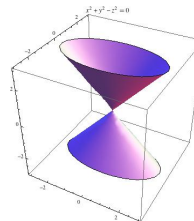
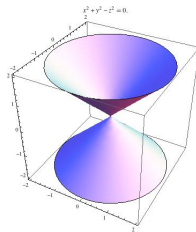
$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}, y = 0$ levert bij omwenteling om de Z-as de *omwentelingskegel*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Samendrukking in de richting van de Y-as.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(algemene *kwadratische kegel*).



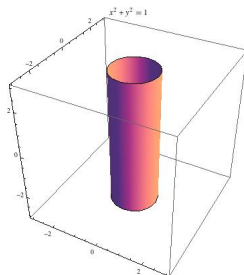
Omwentelingskegel

Algemene kwadratische kegel

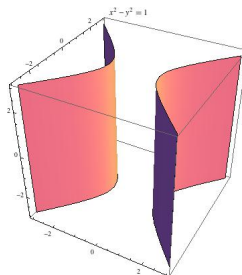
Verdere kwadrieken zijn:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ x^2 &= 2py \end{aligned}$$

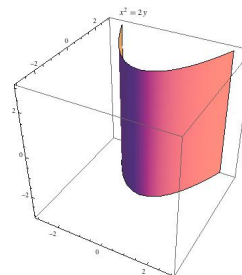
elliptische cylinder,
hyperbolische cylinder,
parabolische cylinder.



Elliptische cylinder



Hyperbolische cylinder



Parabolische cylinder

4.7 Herleiding van de algemene vergelijking van de kwadriek

De vergelijking

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{j=1}^3 a_{0j}x_j + a_{00} = 0 \quad (4.31)$$

kan volgens (4.21) en (4.22) op een der volgende vormen gebracht worden, waarin λ_1 , λ_2 en λ_3 niet nul zijn:

		Type	Rang	
			A	A ⁰
I	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + a$ $a \neq 0$.	Algemene middelpuntskwadriek (ellipsoïde, tweebblad, halsvlak of nuldelig)	3	4
II	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$	Kegel eendelig of nuldelig	3	3
III	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2bx_3$ $b > 0$	Paraboloïde (elliptisch of hyperbolisch)	2	4
IV	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + a$ $a \neq 0$.	Ascyliinder (elliptisch, hyperbolisch of nuldelig)	2	3
V	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$	Twee snijdende vlakken (reëel of toegevoegd complex)	2	2
VI	$\lambda_1 x_1^2 + 2bx_2$ $b > 0$	Parabolische cylinder	1	3
VII	$\lambda_1 x_1^2 + a$ $a \neq 0$.	Twee evenwijdige vlakken (reëel of toegevoegd complex)	1	2
VIII	$\lambda_1 x_1^2$	Dubbeltellend vlak	1	1

In geval I is $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, $\det A^0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a$, dus $a = \frac{\det A^0}{\det A}$.

In geval III is $\det A^0 = -b^2 \lambda_1 \lambda_2$, dus $b = \sqrt{\frac{\det A^0}{\lambda_1 \lambda_2}}$.

De richtingen van de nieuwe assen zijn de eigenvectoren van A . De nieuwe oorsprong is het middelpunt van de kwadriek. Als een kwadriek een middelpunt heeft is dat direct te bepalen. Verschuift men namelijk eerst het assenstelsel, dan kan men de eerstegraadstermen doen verdwijnen.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k} a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_j a_{0j}x_j + a_{00} \quad \text{en} \quad x_i = x'_i + p_i$$

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, x'_3) &= \sum_{i,k} a_{ik}(x'_i + p_i)(x'_k + p_k) + 2 \sum_j a_{0j}(x'_j + p_j) + a_{00} \\ &= \sum_{i,k} a_{ik}x'_i x'_k + 2 \sum_{i,k} a_{ik}p_i x'_k + \sum_{i,k} a_{ik}p_i p_k + 2 \sum_k a_{0k}x'_k + 2 \sum_k a_{0k}p_k + a_{00} \end{aligned}$$

Termen van de eerste graad: $2 \sum_{i,k} a_{ik}p_i x'_k + 2 \sum_k a_{0k}x'_k = 2 \sum_k (\sum_i a_{ik}p_i + a_{0k})x'_k$.
Deze termen vallen weg, indien $\sum_i a_{ik}p_i + a_{0k} = 0$, ($k = 1, 2, 3$).

Dit zijn de z.g. middelpuntsvergelijkingen. Iedere oplossing van deze vergelijkingen geeft de coördinaten van een middelpunt.

Andere methode: $f(x'_1 + p_1, x'_2 + p_2, x'_3 + p_3) = 0$.

Pas de formule van Taylor toe in het punt P :

$$f(p_1, p_2, p_3) + \left[x'_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x'_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]_P + \text{termen van de tweede graad}$$

Nu zijn de middelpuntsvergelijkingen te schrijven als:

$$\left[x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_p = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Is in één van de gevallen I, II of III een middelpunt M bekend, dan kan men de bekende term b_{00} in de vereenvoudigde vergelijking eenvoudig berekenen. Laat de oorspronkelijke vergelijking zijn $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, de vereenvoudigde vergelijking $f'(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$, zodat $f(x_1, x_2, x_3) = f'(x'_1, x'_2, x'_3)$. In het nieuwe coördinatenstelsel is M de oorsprong, dus

$$b_{00} = f'(0, 0, 0) = f'(m'_1, m'_2, m'_3) = f(m_1, m_2, m_3).$$

4.8 Algebraïsche krommen

Definitie 4.8.1. Een *algebraïsche kromme* \mathcal{K} van de graad n is de meetkundige plaats van de punten die voldoen aan een algebraïsche vergelijking van de graad n in x_1 en x_2 .

$$f(x_1, x_2) \equiv f_n(x_1, x_2) + f_{n-1}(x_1, x_2) + \dots + f_1(x_1, x_2) + f_0 = 0 \quad (4.32)$$

$f_k(x_1, x_2)$ is een homogene veelterm van de graad k in x_1 en x_2 . Wij bepalen het snijpunt van de lijn $\ell(\vec{x}) = \vec{p} + \lambda \vec{a}$ met de kromme:

$$f(p_1 + \lambda a_1, p_2 + \lambda a_2) = \lambda^n f_n(a_1, a_2) + \dots = 0 \quad (4.33)$$

Bij iedere wortel λ vinden wij een snijpunt van \mathcal{K} met ℓ door te substitueren in $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$. De coëfficiënt van λ^n hangt alleen van de richting af. Voorlopig zonderen wij de richtingen waarvoor $f_n(a_1, a_2) = 0$ is, uit. De vergelijking (4.33) heeft dan n wortels (als iedere wortel voldoende vaak geteld wordt).

Ter vereenvoudiging stellen wij, dat de kromme \mathcal{K} door O gaat, d.w.z. $f_0 = 0$.

Snijd \mathcal{K} met $\vec{x} = \lambda \vec{a}$.

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2) + \lambda^{n-1} f_{n-1}(a_1, a_2) + \dots + \lambda f_1(a_1, a_2) = 0 \quad (4.34)$$

Hoe vaak telt O als snijpunt? Slechts eenmaal als $f_1(a_1, a_2) \neq 0$.

$$f_1(x_1, x_2) = d_1 x_1 + d_2 x_2.$$

I d_1 en d_2 niet beide nul, bijv. $d_1 \neq 0$. Dan $f_1(a_1, a_2) = 0$ als $a_1/a_2 = -d_2/d_1$.

Conclusie: een willekeurige lijn door O heeft een enkelvoudig snijpunt; op één lijn is het snijpunt echter meervoudig. Deze lijn heet de raaklijn.

II $f_j(x_1, x_2) \equiv 0$ voor $j = 1, 2, \dots, k-1$ en $f_k(x_1, x_2) \neq 0$. Nu wordt (4.34)

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2) + \dots + \lambda^k f_k(a_1, a_2) = 0$$

Conclusie: Een willekeurige lijn door O heeft een k -voudig snijpunt; op hoogstens k verschillende lijnen (de raaklijnen) telt het snijpunt meer dan k -voudig.

In geval I heet O een enkelvoudig punt van de kromme en in geval II een k -voudig punt van de kromme. De vergelijking van de raaklijn in geval I is $d_1 x_1 + d_2 x_2 = 0$. In geval II vindt men de raaklijnen uit de vergelijking $f_k(x_1, x_2) = 0$

Voorbeeld 4.8.2. $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

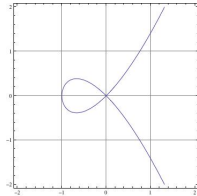
O is een dubbelpunt met reële raaklijnen. $x = \pm y$, een z.g. *knooppunt*

Voorbeeld 4.8.3. $x^3 - x^2 - y^2 = 0$.

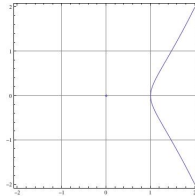
O is een dubbelpunt met toegevoegd complexe raaklijnen. $x = \pm iy$, een z.g. *geïsoleerd punt*

Voorbeeld 4.8.4. $x^3 - y^2 = 0$.

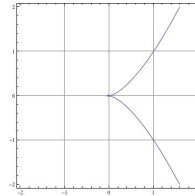
O is een dubbelpunt met samenvallende raaklijnen. $y = 0$, een z.g. *keerpunt*



Knooppunt



Geïsoleerd punt



Keerpunt

Als P niet in de oorsprong ligt, voeren wij een verschuiving uit

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + p_1 \\ x_2 = x'_2 + p_2 \end{cases}$$

$f(x'_1 + p_1, x'_2 + p_2) = 0$. Pas de reeksontwikkeling van Taylor toe:

$$f(p_1, p_2) + x'_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_p + x'_2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_p + \frac{1}{2} \left((x'_1)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right]_p + 2x'_1 x'_2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_p + (x'_2)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right]_p \right) + \dots = 0.$$

P is enkelvoudig punt als $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_p$ en $\left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_p$ niet beide nul zijn.

De raaklijn in P is $x'_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_p + x'_2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_p = 0$.

In oude coördinaten: $(x_1 - p_1) \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_p + (x_2 - p_2) \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_p = 0$.

P is een k -voudig punt als alle afgeleiden tot en met de $(k - 1)$ -ste nul zijn in P.

4.8.1 Toepassing op kegelsneden

$$f(x_1, x_2) \equiv \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{i=1}^2 a_{0i} x_i + a_{00}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} x_k + 2a_{0i}.$$

Raaklijn in $P(p_1, p_2)$:

$$2 \sum_{i=1}^2 (x_i - p_i) \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik} p_k + a_{0i} \right) = 0$$

of

$$\sum_{i,k=1}^2 a_{ik} x_i p_k - \sum_{i,k=1}^2 a_{ik} p_k p_i + \sum_{i=1}^2 a_{0i} x_i - \sum_{i=1}^2 a_{0i} p_i = 0.$$

Tel hier $f(p_1, p_2) = 0$ bij op:

$$\sum_{i,k=1}^2 a_{ik}x_i p_k + \sum_{i=1}^2 a_{0i}(x_i + p_i) + a_{00} = 0.$$

4.8.2 Asymptoten

Snijd $k : f(x_1, x_2)$ met $\vec{x} = \lambda \vec{a}$:

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2) + \dots + \lambda f_1(a_1, a_2) + f_0 = 0$$

Vervang λ door $1/\mu$ dan volgt uit $f_n \rightarrow 0$, dat een wortel $\mu \rightarrow 0$, dus een wortel $\lambda \rightarrow \infty$ (de wortels zijn continue functies van de coëfficiënten). De richtingen waarvoor $f_n(x_1, x_2) = 0$, zijn de *asymptotische richtingen*. Als $f_n(a_1, a_2) = 0$, is één snijpunt naar het oneindige gegaan. Als er nog een snijpunt naar oneindig gaat, spreken wij van een *asymptoot*.

Snijd \mathcal{K} met de lijn $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$

$$f_n(\lambda a_1 + p_1, \lambda a_2 + p_2) + f_{n-1}(\lambda a_1 + p_1, \lambda a_2 + p_2) + \dots + f_1(\lambda a_1 + p_1, \lambda a_2 + p_2) + f_0 = 0$$

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2) + \lambda^{n-1} \left(p_1 \frac{\partial f_n}{\partial a_1} + p_2 \frac{\partial f_n}{\partial a_2} + f_{n-1} \right) (a_1, a_2) + \dots + = 0$$

De coëfficiënt van λ^{n-1} is $F(p_1, p_2)$. De punten van de asymptoot zijn die punten die voldoen aan $F(x_1, x_2) = 0$. De asymptoot wordt dus gegeven door de vergelijking:

$$x_1 \frac{\partial f_n(a_1, a_2)}{\partial a_1} + x_2 \frac{\partial f_n(a_1, a_2)}{\partial a_2} + f_{n-1}(a_1, a_2) = 0.$$

Uitgezonderd worden de gevallen waarin $\frac{\partial f_n(a_1, a_2)}{\partial a_1} = \frac{\partial f_n(a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0$.

4.8.3 Toepassing op kegelsneden

De kegelsnede $a_{11}x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 = 0$ heeft een dubbelpunt in 0 als $a_{01} = a_{02} = 0$. De kegelsnede is dan ontaard in twee rechten. De asymptotische richtingen van de kegelsnede vinden wij door het kwadratische deel nul te stellen. Wij onderscheiden de volgende gevallen:

twee reële asymptoten:	$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$	hyperbool;
geen asymptoten :	$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$	parabool;
twee toegevoegd complexe asymptoten:	$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$	ellips of nuldelige kegelsnede

Bij deze indeling hebben wij ons beperkt tot niet-ontaarde kegelsneden.

4.9 Algebraïsche oppervlakken

Een *algebraïsch oppervlak* Γ is de meetkundige plaats van de punten, die voldoen aan een algebraïsche vergelijking $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv f_n(x_1, x_2, x_3) + \dots + f_1(x_1, x_2, x_3) + f_0,$$

waarin f_k een homogene functie van x_1, x_2, x_3 is.

Snijd Γ met de rechte $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$:

$$f(\lambda a_1 + p_1, \lambda a_2 + p_2, \lambda a_3 + p_3) = 0.$$

In het algemeen zijn er n wortels, d.w.z. n snijpunten. Laat nu Γ door 0 gaan, dan is $f_0 = 0$. Snijd Γ met ℓ : $\vec{x} = \lambda \vec{a}$:

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2, a_3) + \lambda^{n-1} f_{n-1}(a_1, a_2, a_3) + \dots + \lambda f_1(a_1, a_2, a_3) = 0.$$

Onderstel $f_1(x_1, x_2, x_3) \neq 0$. O is een dubbeltellend snijpunt, als $f_1(a_1, a_2, a_3) = 0$; ℓ heet dan raaklijn. De meetkundige plaats der raaklijnen is het *raakvlak* $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$. Wij onderzoeken de doorsnijding van Γ met het raakvlak. Kies hiertoe het coördinatenstelsel, zó, dat $x_3 = 0$ het raakvlak is.

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, x_3) + \dots + f_2(x_1, x_2, x_3) + x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ \text{dus} \\ f_n(x_1, x_2, 0) + \dots + f_2(x_1, x_2, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat O een dubbelpunt van de doorsnijding is. Een enkelvoudig punt van een algebraïsch oppervlak is dus altijd dubbelpunt van de doorsnijding met zijn raakvlak.

Wij onderscheiden de volgende gevallen naar de aard van het dubbelpunt:

- P is knooppunt, dan heet P *hyperbolisch punt*,
- P is geïsoleerd punt dan heet P *elliptisch punt*,
- P is keerpunt, dan heet P *parabolisch punt*.

Al deze punten kunnen op één oppervlak voorkomen. (Voorbeeld: torus, klok.)

4.9.1 Gedrag in een punt $P(p_1, p_2, p_3)$

Voer de volgende verschuiving uit: $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{p}$

$$f(x'_1 + p_1, x'_2 + p_2, x'_3 + p_3) = 0$$

Reeksontwikkeling van Taylor⁷:

$$f(p_1, p_2, p_3) + x'_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_p + x'_2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_p + x'_3 \left[\frac{\partial f}{\partial x_3} \right]_p + \text{h.o.t.} = 0$$

P ligt op de kromme :

$$f(p_1, p_2, p_3) = 0$$

Raakvlak in P :

$$x'_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_p + x'_2 \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_p + x'_3 \left[\frac{\partial f}{\partial x_3} \right]_p = 0$$

In oude coördinaten:

$$(x_1 - p_1) \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_p + (x_2 - p_2) \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_p + (x_3 - p_3) \left[\frac{\partial f}{\partial x_3} \right]_p = 0.$$

⁷h.o.t.: hogere orde termen.

4.9.2 Asymptotische richtingen

Γ is gegeven door:

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv f_n(x_1, x_2, x_3) + \dots + f_1(x_1, x_2, x_3) + f_0,$$

Snijd Γ met ℓ : $\vec{x} = \lambda \vec{a}$: De coëfficiënt van λ^n wordt dan $f_n(a_1, a_2, a_3)$. Een richting \vec{a} heet *asymptotische richting*, als $f_n(a_1, a_2, a_3) = 0$. Bij een kwadriek heet de kegel $f_n(x_1, x_2, x_3) = 0$ de *richtkegel*. De richtkegel bevat dus de rechten door O in de asymptotische richtingen.

4.9.3 Toepassing op kwadrieken

Γ is gegeven door:

$$f(\vec{x}) \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{i=1}^3 a_{0i} x_i + a_{00}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k + 2a_{0i}.$$

Raakvlak in $P(p_1, p_2, p_3)$: $\sum_{i=1}^3 (x_i - p_i) \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k + a_{0i} \right) = 0$.

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i p_k - \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} p_i p_k + \sum_{i=1}^3 a_{0i} x_i - \sum_{i=1}^3 a_{0i} p_i = 0.$$

Tel hierbij op $f(\vec{p}) = 0$:

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i p_k + \sum_{i=1}^3 a_{0i} (x_i + p_i) + a_{00} = 0$$

4.9.4 De richtkegel

De richtkegel van Γ wordt gegeven door $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$. Bij het halsvlak lopen aan iedere beschrijvende van de kegel twee beschrijvenden van het halsvlak evenwijdig. De richtkegel van een zadenvlak is ontaard in twee vlakken (*richtvlakken*).

4.10 Meetkundige Plaatsen

4.10.1 Regelvlakken

Definitie 4.10.1. Een *regelvlak* is een oppervlak met de eigenschap, dat door ieder punt van het oppervlak minstens één rechte lijn gaat, die geheel op het oppervlak ligt.

Een regelvlak kan worden gegeven door een parametervoorstelling :

$$\vec{x} = \vec{p}(t) + \lambda \vec{a}(t) \tag{4.35}$$

$\vec{x} = \vec{p}(t)$ stelt de *richtkromme* voor. De vergelijking $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ van het regelvlak vindt men door λ en t uit (4.35) te elimineren, (d.w.z. men stelt de voorwaarde op, waaraan x_1, x_2, x_3 moeten voldoen, opdat λ en t gevonden kunnen worden).

4.10.2 Cylinder en kegel

Een regelvlak waarvan alle beschrijvende evenwijdig zijn, heet een *cylinder*. De parametervoorstelling van een cylinder is:

$$\vec{x} = \vec{p}(t) + \lambda \vec{a} \quad (4.36)$$

Gaan alle beschrijvende van een regelvlak door één punt, dan hebben wij te maken met een *kegel*. Parametervoorstelling van kegel met top P :

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}(t) \quad (4.37)$$

4.10.3 Omwentelingsoppervlakken

De kromme \mathcal{K} : $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ is richtkromme van het omwentelingsoppervlak met $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$. Breng een vlak α loodrecht op de as aan: $(\vec{a}, \vec{x}) = c$ en snijd α met een bol $(\vec{x} - \vec{p})^2 = r^2$, met middelpunt P en straal r . Wij eisen, dat deze snijcirkel γ een parallelcirkel is, d.w.z. \mathcal{K} snijdt γ . Door eliminatie van x_1, x_2, x_3 en t uit $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, $(\vec{a}, \vec{x}) = c$ en $(\vec{x} - \vec{p})^2 = r^2$ vinden wij een betrekking $f(c, r)$ tussen c en r . De vergelijking van het oppervlak is $f\left((\vec{a}, \vec{x}), \sqrt{(\vec{x} - \vec{p})^2}\right) = 0$.

4.11 Ruimtekrommen

Een *ruimtekrumme* kan men geven als doorsnede van twee oppervlakken of door een parameter voorstelling. Wij maken hier gebruik van de parametervoorstelling in Cartesische coördinaten:

$$ka : \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ x_3 = \varphi_3(t) \end{cases} \quad \text{of} \quad \vec{x} = \vec{\varphi}(t). \quad (4.38)$$

Laat P een punt op \mathcal{K} zijn, zodat $\vec{p} = \vec{\varphi}(t_0)$.

Snijd \mathcal{K} met een vlak α door P :

$$(\vec{a}, \vec{x}) = (\vec{a}, \vec{p}) \quad (4.39)$$

$$F(t) = (\vec{a}, \vec{\varphi}(t)) - (\vec{a}, \vec{\varphi}(t_0)) = 0. \quad (4.40)$$

Laat een der snijpunten $Q(\vec{\varphi}(t_0 + h))$ zijn.

$$(\vec{a}, \vec{\varphi}(t_0 + h)) - (\vec{a}, \vec{\varphi}(t_0)) = 0. \quad (4.41)$$

Verander \vec{a} zodanig, dat Q tot P nadert. Onder geschikte continuïteitsvoorwaarden geeft (4.41) bij de limiet

$$(\vec{a}, \dot{\vec{\varphi}}(t_0)) = 0, \quad (4.42)$$

waarin de punt differentiatie naar t aanduidt. (4.42) betekent dat α gaat door de lijn

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \dot{\vec{\varphi}}(t_0). \quad (4.43)$$

Deze lijn heet de raaklijn in P aan \mathcal{K} . Laat $R(\vec{\varphi}(t_0 + k))$ een snijpunt zijn met een vlak door de raaklijn. Laat α om de raaklijn draaien, zodat R tot P nadert. Bij de limiet is

$$(\vec{a} + \ddot{\vec{\varphi}}(t_0)) = 0. \quad (4.44)$$

Mits $\dot{\vec{\varphi}}(t_0)$ en $\ddot{\vec{\varphi}}(t_0)$ onafhankelijk zijn bepalen (4.42) en (4.44) een vector \vec{a} , dus een vlak door P . Dit vlak heet het *osculatievlak* in P . Door \vec{a} uit (4.39), (4.42) en (4.44) te elimineren, vindt men de vergelijking van het osculatievlak:

$$\begin{vmatrix} x_1 - \varphi_1(t_0) & x_1 - \varphi_2(t_0) & x_3 - \varphi_3(t_0) \\ \dot{\varphi}_1(t_0) & \dot{\varphi}_2(t_0) & \dot{\varphi}_3(t_0) \\ \ddot{\varphi}_1(t_0) & \ddot{\varphi}_2(t_0) & \ddot{\varphi}_3(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

4.12 Isometrische afbeeldingen

Definitie 4.12.1. Een *isometrische afbeelding* φ in een Euclidische ruimte E is een afbeelding van E op zichzelf, die alle afstanden invariant laat, dus $\rho(P, Q) = \rho(\varphi(P), \varphi(Q))$.

Stelling 4.12.2. Elke isometrische afbeelding is een-eenduidig.

Bewijs:

$$\varphi(P) = \varphi(Q) \rightarrow \rho(\varphi(P), \varphi(Q)) = 0 \rightarrow \rho(P, Q) = 0 \rightarrow P = Q.$$

□

Stelling 4.12.3. De isometrische afbeeldingen in E vormen een groep G .

Stelling 4.12.4. De isometrische afbeeldingen in E , die een punt P invariant laten, vormen een ondergroep G_P van G .

Stelling 4.12.5. Is O de oorsprong van het coördinatenstelsel, dan laten de afbeeldingen uit G , het inwendig product van elke twee vectoren invariant. $\psi \in G_0 \rightarrow (\psi(\vec{p}), \psi(\vec{q})) = (\vec{p}, \vec{q})$.

Bewijs: $|\psi(\vec{p}) - \psi(\vec{q})|^2 = |\vec{p} - \vec{q}|^2$.

$$|\psi(\vec{p})|^2 - 2(\psi(\vec{p}), \psi(\vec{q})) + |\psi(\vec{q})|^2 = |\vec{p}|^2 - 2(\vec{p}, \vec{q}) + |\vec{q}|^2.$$

Bovendien is $|\psi(\vec{p})| = |\vec{p}|$ en $|\psi(\vec{q})| = |\vec{q}|$.

□

Opmerking 4.12.6. Een orthonormale basis $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ gaat door ψ over in een orthonormale basis $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$. De coördinaten van \vec{p} ten opzichte van $\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n$ zijn dezelfde als die van $\psi(\vec{p})$ ten opzichte van $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^n$, want $(\vec{p}, \vec{e}^i) = (\psi\vec{p}, \vec{u}^i)$ voor $i = 1, 2, \dots, n$. Stel $(\vec{p}, \vec{e}^i) = p_i$ dan $(\psi(\vec{p}), \vec{e}^i) = p'_i$. Volgens (4.2) is

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Volgens (4.12) is S een orthogonale matrix.

Stelling 4.12.7. De afbeeldingen uit G_0 zijn lineair.

Bewijs: Dit volgt direct uit (4.12.2).

□

Stelling 4.12.8. Ten opzichte van een geschikte orthonormale basis heeft S uit (4.45) een der vormen

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

of

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Hierbij wordt niet uitgesloten dat $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$.

Bewijs: (4.46) stelt een draaiing om de x_3 -as over een hoek φ voor, ((4.47)) een draaiing gevolgd door een spiegeling in het vlak $x_3 = 0$

□

Stelling 4.12.9. Iedere translatie in E is isometrisch.

Stelling 4.12.10. Iedere isometrische afbeelding φ in E is te schrijven als $\varphi = \sigma\tau\psi$, waarin τ een translatie, ψ een draaiing en σ óf een spiegeling óf de identiteit is.

In matrixvorm:

$$\psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

waarin S een orthogonale matrix is,

$$\tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Dit zijn precies dezelfde formules als golden voor de overgang naar een andere orthogonale basis en voor de keuze van een nieuwe oorsprong. (Zie Stelling 4.1.4 en Sectie 4.2.1.)

4.13 Invarianten

Beschouw nu de kwadratische functie

$$f(\vec{x}) \equiv \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{j=1}^3 a_{0j} x_j + a_{00}.$$

Laat deze door een isometrische afbeelding $\varphi = \sigma\psi\tau$ overgaan in

$$f(\sigma\psi\tau\vec{x}) \equiv \sum_{i,k=1}^3 b_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{j=1}^3 b_{0j} x_j + b_{00}.$$

Volgens stelling 4.2.2 is dan $\det A = \det B$ en $\det A^0 = \det B^0$. Verder zijn de eigenwaarden van A dezelfde als die van B . Nu zijn de eigenwaarden van A de wortels van de vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(m_{11} + m_{22} + m_{33}) + \det A = 0.$$

Hierin is m_{ii} de minor van a_{ii} in A . Evenzo zijn de eigenwaarden van B de wortels van

$$-\lambda^3 + \lambda^2(b_{11} + b_{22} + b_{33}) - \lambda(n_{11} + n_{22} + n_{33}) + \det B = 0.$$

Opdat deze vergelijkingen dezelfde wortels hebben, is nodig en voldoende dat $a_{11} + a_{22} + a_{33} = b_{11} + b_{22} + b_{33}$ en $m_{11} + m_{22} + m_{33} = n_{11} + n_{22} + n_{33}$.

Stelling 4.13.1. Bij een isometrische afbeelding zijn de volgende functies der coëfficiënten van een kwadratische functie invariant :

- $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$
- $I_2 = m_{11} + m_{22} + m_{33}$
- $I_3 = \det A$
- $I_3 = \det A^0$

Stelling 4.13.2. Nodig en voldoende, opdat de kwadratische functie

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{j=1}^3 a_{0j}x_j + a_{00}, \quad (4.50)$$

waarvoor $\det A \neq 0$ en $\det A^0 \neq 0$, door een isometrische afbeelding overgevoerd kan worden in de kwadratische functie

$$\sum_{i,k=1}^3 b_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{j=1}^3 b_{0j}x_j + b_{00} \quad (4.51)$$

is dat

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} &= b_{11} + b_{22} + b_{33} \\ m_{11} + m_{22} + m_{33} &= n_{11} + n_{22} + n_{33} \\ \det A &= \det B \\ \det A^0 &= \det B^0 \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Bewijs: Dat de voorwaarden (4.52) nodig zijn, volgt uit stelling 4.13.1. Laat nu aan (4.52) voldaan zijn. Uit de eerste drie vergelijkingen (4.52) volgt dat de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ van A ook de eigenwaarden van B zijn. Uit § 7 volgt nu, dat (4.50) door een isometrische afbeelding op de vorm

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \frac{\det A^0}{\det A}$$

gebracht kan worden. Evenzo (4.51) op de vorm

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \frac{\det B^0}{\det B}.$$

Daar deze vormen volgens (4.52) samenvallen, is de stelling bewezen. \square

Stelling 4.13.3. Iedere invariant van een kwadratische functie bij isometrische afbeelding is een functie van I_1, I_2, I_3 en I_4 .

Bewijs: Laat I zo'n invariant zijn. Als voor twee functies f_1 en f_2 de waarden van I_1, I_2, I_3 en I_4 overeenstemmen, dan gaat f_1 door een isometrische afbeelding in f_2 over, dus ook I heeft dezelfde waarden voor f_1 en voor f_2 . De waarde van I is dus bepaald door de waarden van I_1, I_2, I_3 en I_4 . \square

Opmerking 4.13.4. Nodig en voldoende opdat de kwadrieken met vergelijkingen

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{j=1}^3 a_{0j}x_j + a_{00},$$

en

$$\sum_{i,k=1}^3 b_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{j=1}^3 b_{0j}x_j + b_{00},$$

congruent zijn, is, dat er een getal k bestaat, zodat

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} &= k(b_{11} + b_{22} + b_{33}), \\ m_{11} + m_{22} + m_{33} &= k^2(n_{11} + n_{22} + n_{33}), \\ \det A &= k^3 \det B, \\ \det A^0 &= k^4 \det B^0. \end{aligned}$$

Schriftelijk werk (tevens tentamen) 4 febr 1966

1. Onderzoek voor alle reële waarden van a de aard van de kwadriek met vergelijking

$$x^2 + 2xy + 2axz + ay^2 + 2yz + z^2 + 2x + 2y + 2(a+2)z + 3 = 0.$$

2. Bepaal de vergelijkingen van beide omwentelingsoppervlakken, die ontstaan doordat de rechte $\begin{cases} x = 0 \\ z = my \end{cases}$ wentelt om $\begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$ resp. $\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$.
Toon aan dat deze beide oppervlakken nog een tweede rechte gemeen hebben en bepaal die rechte door middel van vergelijkingen.

3. Bepaal de vergelijking van de kegel met top $(0,0,a)$ die tot richtcirkel heeft: de cirkel $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = mx \end{cases}$.
Voor welke waarden van m is deze kegel een omwentelingskegel?

4. Gegeven is de algebraïsche kromme met vergelijking

$$x^3y + xy^3 + x^2 - y^2 = 0.$$

Onderzoek of de kromme meervoudige punten en asymptoten heeft.
Schets de grafiek.

Oplossing

