

Hoofdstuk 2

Wiskundige tovertaal

Bij het schrijven van dit hoofdstuk heb ik onder andere intensief gebruik gemaakt van het collegedictaat “Inleiding tot de moderne wiskunde” van Prof. N.G. de Bruijn (TH Eindhoven, 1965).

2.1 Symbolen

We geven hier een paar belangrijke wiskundige symbolen. Later worden ze uitgebreid uitgelegd.

Gelijkheidssymbolen

$A = B$	A is gelijk aan B
$A \neq B$	A is niet gelijk aan B
$A := B$	A wordt gedefinieerd door B
$A \approx B$	A is ongeveer gelijk aan B (numerieke wiskunde)
$A \sim B$	A behoort tot dezelfde equivalentieklasse als B
	A is gelijkvormig met B (meetkunde)
$A \cong B$	A is congruent met B (meetkunde)
$A \equiv B$	A is equivalent met B

Logische symbolen

$\Rightarrow$	als ...dan ...
$\Leftrightarrow$	...dan en slechts dan als ...
$\wedge$	...en ...
$\vee$	...of ...
$\neg$	niet ...
$\forall$	voor alle ...
$\exists$	er is ...
$\exists!$	er is één en slechts één ...

Getalverzamelingen

$\mathbb{N}$	de natuurlijke getallen
$\mathbb{Z}$	de gehele getallen
$\mathbb{Q}$	de rationale getallen
$\mathbb{R}$	de reële getallen
$\mathbb{C}$	de complexe getallen

Verzamelingstheoretische symbolen

$a \in V$	a is element van V
$a \notin V$	a is geen element van V
$A \subset B$	A is deelverzameling van B
$A \supset B$	B is deelverzameling van A
$\emptyset$	de lege verzameling
$\#A$	het aantal elementen van A

Unitaire operatoren

$ a $	absolute waarde van a
$\ a\ $	norm van a

Simpele afkortingen

$1, 2, \dots$	1,2, enzovoort
$1, 2, \dots, 27$	1,2, enzovoort tot en met 27
∞	oneindig
desda	dan en slechts dan
dwz	dat wil zeggen
ihb	in het bijzonder
ipv	in plaats van

Het beschrijven van verzamelingen

Er zijn een paar manieren om precies te beschrijven wat de elementen van een verzameling zijn. We gebruiken daarvoor de haakjes $\{$ en $\}$ en soms het teken $|$ dat we uitspreken als “zodat”.

Voorbeelden:

$\{a, b, c, d, e\}$	de verzameling bestaande uit de elementen a, b, c, d, e .
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 10\}$	de verzameling van reële getallen waarvan het kwadraat kleiner is dan 10
$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\}$	de verzameling van natuurlijke getallen waarvan het kwadraat kleiner is dan 10
$\{(\cos \phi, \sin \phi) \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$	de verzameling van punten in $\mathbb{R}^2$ die afstand 1 tot de oorsprong hebben.
$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cap B$, dwz de doorsnede van A en B
$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	$A \cup B$, dwz de vereniging van A en B

2.2 Wiskundige beweringen

We gaan hier iets uitleggen over wiskundige zinnen. Er worden een paar begrippen uitgelegd die samen het belangrijkste deel van de wiskundige taal uitmaken. Als je uitgebreid op de dingen die hier staan zou willen ingaan, zou je die in boeken over ‘logica’ of ‘grondslagen van de wiskunde’ moeten opzoeken. Maar om te begrijpen hoe je wiskundige taal gebruikt is het bestuderen van de logica of de grondslagen niet echt nodig. Dat is dus net als bij gewone taal: je kunt best goed Nederlands spreken zonder de grammatica bestudeerd te hebben. Het is dus niet nodig (en ook niet mogelijk) om in deze uitleg volledig te zijn. Evenals bij gewone taal wordt niet alles even vaak gebruikt en zijn er verschillen bij verschillende groepen gebruikers en bij verschillende

omstandigheden. Toch zit er veel gemeenschappelijks in de taal die gebruikt wordt. We wijzen hier slechts op enkele punten, en geven enkele belangrijke notaties.

We gaan –zoals gebruikelijk in de klassieke wiskunde– uit van een twee-waardige logica: iets is *waar* óf het is *onwaar*.¹ Er is geen derde mogelijkheid: zoets als “we kunnen onmogelijk uitmaken of die bewering waar of onwaar is”. Zulke uitspraken (beweringen) vallen buiten de klassieke wiskunde.

Beweringen.

We beschouwen allerlei *beweringen*, ook wel *volzinnen* of *uitspraken* genoemd. Gemakshalve stellen we vaak een bewering voor door een hoofdletter. Zo’n letter kan evengoed een juiste als een onjuiste bewering voorstellen.

Voorbeeld 2.2.1. $A = “2 + 2 = 4”$ of $B = “3 \times 6 < 7”$.

Ontkenning.

Is B een bewering, dan is $\neg B$ (spreek uit: niet- B) de notatie voor de ontkenning van B . Steeds is òf B òf $\neg B$ waar.

Voorbeeld 2.2.2. “ $\neg(2 + 2 = 4)$ ” betekent “ $2 + 2 \neq 4$ ” en “ $\neg(3 \times 6 < 7)$ ” betekent “ $3 \times 6 \geq 7$ ”.

Conjunctie.

De uitspraak “ A en B ” (notatie $A \wedge B$) is slechts waar als A en B beide waar zijn.

Voorbeeld 2.2.3. : “ $(2 + 2 = 4) \wedge (3 \times 3 = 5)$ ” is onwaar; “ $\neg((2 + 2 = 4) \wedge (3 \times 3 = 5))$ ” is waar.

A	$A \wedge B$	
1	1	0
0	0	0
B	1	0

0: onwaar
1: waar

Disjunctie.

De uitspraak “ A of B ” (notatie $A \vee B$) is waar als minstens één van beide beweringen A of B waar is.

Voorbeeld 2.2.4. : “ $(2 \times 2 = 4) \vee (3 \times 3 = 5)$ ” is waar.

We kunnen dit ook beschrijven met de symbolen die we nu al kennen: $A \vee B = \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$, of in woorden: ‘ A of B ’ is dus juist dan waar als niet beide onwaar zijn.

In de dagelijkse spreektaal wordt “of” vaak (en dan meestal met klemtoon) in uitsluitende zin gebruikt: één van beide maar niet allebei. Als wij dat willen aanduiden, zullen we de zinswending “òf A òf B ” gebruiken, maar we voeren daarvoor geen afzonderlijke notatie in.

A	$A \vee B$	
1	1	1
0	1	0
B	1	0

Implicatie.

De veelgebruikte formule $A \Rightarrow B$ betekent: “uit A volgt B ”. Dat betekent dus: “als A waar is, dan is B ook waar”. Om precies te zijn, $A \Rightarrow B$ is waar in de volgende drie gevallen: A en B waar; A onwaar en B waar; A onwaar en B onwaar. $A \Rightarrow B$ is alleen onwaar als: A waar en B onwaar. We zeggen voor $A \Rightarrow B$ ook vaak: “ B volgt uit A ” of “uit A volgt B ” of “ A impliceert B ”.

A	$A \Rightarrow B$	
1	1	0
0	1	1
B	1	0

¹Dit is een bijzondere spelregel die we vaak gebruiken in de wiskunde. In het dagelijks leven is die regel niet altijd te hanteren.

Let op dat met deze beweringen niet wordt gezegd dat A waar is, en ook niet dat B waar is. Zo bijvoorbeeld: (i) $(2 \times 2 = 5) \Rightarrow$ ‘elk paard heeft 7 poten’ is een juiste implicatie, onverschillig of paarden nu 4, 5 of 7 poten hebben. In het gewone spraakgebruik kent men zulke implicaties bijna niet. Men denkt gewoonlijk bij een uitspraak “als A , dan B ” aan oorzaak en gevolg: A is een oorzaak voor B , of A is een reden voor B (zoals: “Als het regent dan blijf ik thuis”) of misschien een verklaring voor B (“Als de vlag uithangt, dan is het een nationale feestdag”). Net zo goed staat men vreemd tegenover uitspraken als: (ii) als het regent, dan is $2 \times 2 = 4$.

In de wiskunde komen vreemdsoortige implicaties zoals (i) of (ii) hierboven dikwijls voor, maar ze vallen niet altijd op omdat wiskundige beweringen meestal minder gemakkelijk op waarheid te onderzoeken zijn dan de vraag of het al dan niet regent. De vreemde uitspraken worden dan meestal ook niet zo vreemd gevonden. Natuurlijk is het verkrijgen van zulke implicaties geen doel op zichzelf, maar ze worden wel soms gebruikt om er verdere conclusies uit te trekken.

Vreemde (en soms onware) beweringen komen we in de wiskunde vaak tegen bij een *bewijs uit het ongerijmde*, ook wel *indirect bewijs* genoemd. Om een bewering B te bewijzen, neemt men dan eerst aan dat $\neg B$ waar is, en door een verder correcte redenering leidt men dan iets af dat duidelijk niet waar is. Dan volgt dus dat de aanname $\neg B$ onjuist is. Daaruit volgt B .²

Het gewone taalgebruik is ook niet consequent in het eisen van een duidelijke relatie tussen de beide leden van een implicatie. Ingeburgerd is bijv.: “Als tweede Paasdag op woensdag valt, dan ben ik een boon”. En ook in een zin als: “Als je niets meer van me hoort, dan kom ik” is A moeilijk als reden of oorzaak voor B te verklaren. In de dagelijkse spreektaal wordt de volgorde vaak omgedraaid. Men zegt bijv.: “Ik stop, als het rode licht brandt”. Soms wordt hiermee tegelijk bedoeld: “Ik stop niet, als het rode licht niet brandt”. Om zulke misverstanden te vermijden zullen we aan de volgorde “als ..., dan ...” de voorkeur geven.

We zien dus dat, als A onwaar is, $A \Rightarrow B$ altijd een juiste uitspraak is, ongeacht B . Dit staat bekend als het logisch principe “Ex falso sequitur quodlibet” [Uit een foute uitspraak volgt alles wat je maar wil], dat al wordt toegeschreven aan de geleerde franciscaan John Duns Scotus (circa 1266 – 1308).



Scotus

Equivalentie.

De beweringen A en B heten *equivalent* (of *gelijkwaardig*) als het niet waar is, dat één van de twee waar en de andere onwaar is. Notatie $A \Leftrightarrow B$. Men zegt vaak hiervoor: “ A geldt dan en slechts dan, als B geldt”. Men kan ook zeggen, dat $A \Leftrightarrow B$ betekent, dat $A \Rightarrow B$ en $B \Rightarrow A$ beide waar zijn.

A	$A \Leftrightarrow B$	
1	1	0
0	0	1
B	1	0

Om in een bepaald geval $A \Leftrightarrow B$ te bewijzen, is het ook voldoende te laten zien, dat $A \Rightarrow B$ en $\neg A \Rightarrow \neg B$. Soms maakt men de fout dat men $A \Rightarrow B$ en $\neg B \Rightarrow \neg A$ bewijst en denkt, dat men daarmee $A \Leftrightarrow B$ heeft bewezen.

Contrapositie van een implicatie.

Is $A \Rightarrow B$, dan is ook $\neg B \Rightarrow \neg A$. De laatste implicatie heet de *contrapositie* van de eerste, en is ermee gelijkwaardig.

²Voorbeeld: Men wil bijv. van een getal g , waarvan zekere eigenschappen gegeven zijn, bewijzen, dat het nul is. Men geeft dan soms een indirect bewijs: uitgaande van de onderstelling dat $g \neq 0$ is, leidt men met behulp van de gegeven eigenschappen iets af dat kennelijk onjuist is. Men bewijst bijvoorbeeld $(g \neq 0) \Rightarrow (2 + 1 = 2)$. Uit het feit dat deze implicatie voor ons getal g juist is, volgt direct, dat $g = 0$. Het komt ook wel voor, dat men afleidt: $(g \neq 0) \Rightarrow (g = 0)$. Uit het feit dat deze implicatie juist is, volgt dan dus ook dat $g = 0$.

Omkering van een implicatie.

$B \Rightarrow A$ heet de omkering van $A \Rightarrow B$. Soms is de *omkering* van een juiste implicatie ook nog waar, en soms niet.

Opgave 2.2.5. Ga na, dat $A \wedge B$ hetzelfde betekent als $\neg[(\neg A) \vee (\neg B)]$,
 $A \Rightarrow B$ hetzelfde betekent als $\neg[A \wedge (\neg B)]$,
 $A \vee B$ hetzelfde betekent als $(\neg A) \Rightarrow B$.
 $\neg(A \wedge B)$ hetzelfde betekent als $(A \Rightarrow \neg B)$.
 Ga na dat $(2 + 1 = 4) \vee (3 = 3)$ en $(2 = 3) \vee (2 = 2)$ juiste uitspraken zijn.

Beginnelingen protesteren vaak tegen een juiste uitspraak als “ $3 \geq 3$ ”, maar je moet bedenken dat $p \geq q$ is gedefinieerd als $(p > q) \vee (p = q)$, of wat hetzelfde betekent, als $\neg(p < q)$.

Quantoren.

Laat $B(x)$ een bewering zijn waarin op één of meer plaatsen de letter x optreedt en waarin men nog voor x allerlei dingen kan invullen. De letter x heet een variabele. Gemakshalve beperken we ons tot het substitueren van dingen van een nader afgesproken soort, bijv. reële getallen. $B(x)$ is bijv. een uitdrukking zoals $x > 3$ of $x^2 = 4$ of $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

We gebruiken nu de formule

$$\forall_x B(x) ,$$

om te beweren dat bij elke mogelijke vervanging van de letter x door een ding van de beschouwde soort, de uitdrukking $B(x)$ in een ware bewering overgaat. $\forall$ heet de *universele quantor* en ook wel het al-symbool. Evenzo betekent

$$\exists_x B(x) ,$$

dat er minstens één mogelijkheid bestaat om voor x iets te substitueren zodat $B(x)$ een juiste bewering wordt. $\exists$ heet de *existentiële quantor* of het existentiesymbool. Als er precies één (één en slechts één) x bestaat zodat $B(x)$ een ware uitspraak is, dan schrijven we

$$\exists!_x B(x) .$$

De letter x heeft altijd betrekking op dingen van een bepaalde soort. Soms geven we dat ook in de formule aan. Als we met x een reëel getal bedoelen, schrijven we bijvoorbeeld

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} B(x) , \quad \exists_{x \in \mathbb{R}} B(x) , \quad \text{of} \quad \exists!_{x \in \mathbb{R}} B(x) .$$

Voorbeeld 2.2.6. :

$$\begin{aligned} &\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 1 > 0. \\ &\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2. \\ &\forall_{x \in \mathbb{R}} x > 0 \Rightarrow x^2 + x > 0. \\ &\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 4. \\ &\exists_{x \in \mathbb{R}} (x > 0) \wedge (x < 1). \\ &\exists_{x \in \mathbb{R}} (x^2 < 0) \Rightarrow (x = 1). \\ &\exists_{x \in \mathbb{R}} (x = 1) \Rightarrow (x^2 < 0). \end{aligned}$$

Al deze uitspraken zijn juist.

Merk verder op, dat voor elke bewering $B(x)$ geldt:

$$\begin{aligned}\neg \forall_x B(x) &\Leftrightarrow \exists_x \neg B(x), \\ \neg \exists_x B(x) &\Leftrightarrow \forall_x \neg B(x), \\ \exists_x B(x) &\Leftrightarrow \neg \forall_x (\neg B(x)).\end{aligned}$$

Nodige en voldoende voorwaarden.

Als $\forall_x [A(x) \Rightarrow B(x)]$, dan zegt men vaak, dat $A(x)$ een *voldoende voorwaarde* voor $B(x)$ is. Is $\forall_x [\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x)]$, dan heet $A(x)$ een *nodige voorwaarde* voor $B(x)$. Is $A(x)$ tegelijk nodig en voldoende voor $B(x)$, dan noemt men de beweringen $A(x)$ en $B(x)$ *equivalent*. De één is een *nodig en voldoende voorwaarde* voor de ander.

Voorbeeld 2.2.7. : $g > 0$ is nodig opdat $g - 1 > 0$ is; het is echter niet voldoende; $g > 0$ is voldoende opdat $g + 1 > 0$ is, het is echter niet nodig.

Vrije en gebonden variabelen.

In de uitspraak $\forall_x B(x)$ mag de letter x door elke andere letter worden vervangen, mits geen verwarring ontstaat met letters die al een vastgestelde betekenis hebben. Waar het om gaat is, dat we twee keer hetzelfde symbool gebruiken. Dus

$$\forall_x B(x) \Leftrightarrow \forall_y B(y) \Leftrightarrow \forall_z B(z).$$

Het geeft natuurlijk verwarring om te schrijven $\forall_4 B(4)$ of $\forall_B B(B)$.

Er is een wezenlijk verschil tussen de uitdrukkingen als $B(x)$ enerzijds en $\forall_x B(x)$ anderzijds. Zolang x alleen maar een variabele is, is $B(x)$ geen bewering, doch het wordt een bewering, wanneer we voor de letter iets invullen. $\forall_x B(x)$ is wel een bewering, maar hierin kunnen we niets meer invullen. Wanneer we hierin x door een bepaald object vervangen, bijv. het getal 3, dan komt er iets te staan dat geen betekenis heeft.

De letter x in $\forall_x B(x)$ noemt men een *gebonden variabele*; een *vrije variabele* is een letter, waarvoor we nog substitutiemogelijkheden hebben. In een bewering staan nooit vrije variabelen. Alleen in stukken van beweringen komen vrije variabelen voor. In $B(x)$ is x een vrije variabele, maar $B(x)$ is dan ook geen bewering. Het kan wel als een stuk van een bewering optreden, bijv. in $\forall_x B(x)$ of $\exists_x B(x)$.

In de praktijk spreekt men vaak slechts stukken van beweringen uit, om uitvoerige herhalingen te vermijden. Maar als er onduidelijkheid dreigt te ontstaan is het beter om de beweringen precies te formuleren.

Ook in algebraïsche formules komt het onderscheid tussen vrije en gebonden variabelen voor. In een uitdrukking als

$$(a-1) \sum_{k=0}^n a^k = a^{n+1} - 1$$

zijn a en n vrije variabelen, en k is een gebonden variabele. In de volzin:

“ Voor elk reëel getal a en voor elk natuurlijk getal n geldt: $(a-1) \sum_{k=0}^n a^k = a^{n+1} - 1$. ”

zijn echter ook a en n gebonden variabelen (onverschillig of de volzin juist of onjuist is).

De (straks nog te bespreken) gewoonte om $\forall$ -symbolen aan het begin van een zin weg te laten maakt het vaak moeilijk om het verschil tussen vrije en gebonden variabelen te zien. Die gewoonte houdt immers in dat men met een stuk van een formule de gehele formule bedoelt!

Veelal komen in de wiskunde beweringen voor met verschillende quantoren achter elkaar. Is $B(x, y)$ een uitdrukking die de beide letters x en y bevat, dan kan men bijv. de bewering

$$\forall x \exists y \ B(x, y)$$

beschouwen. Deze beweert, dat voor elke x de uitdrukking $\exists y \ B(x, y)$ waar is. Ga na, dat voor elke uitdrukking $B(x, y)$ de volgende regels juist zijn:

$$\forall x \forall y \ B(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x \ B(x, y) , \quad (2.1)$$

$$\exists x \exists y \ B(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x \ B(x, y) , \quad (2.2)$$

$$\exists x \forall y \ B(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x \ B(x, y) . \quad (2.3)$$

In (2.1) en (2.2) zien we dat de volgorde bij quantoren van dezelfde soort niet uitmaakt. Daarom schrijven we voor $\forall x \forall y \ B(x, y)$ ook wel $\forall_{x,y} B(x, y)$ en voor $\exists x \exists y \ B(x, y)$ ook $\exists_{x,y} B(x, y)$.

Daarentegen mag de implicatie (2.3) niet altijd worden omgekeerd. Zo is bijv. $\forall y \exists x (x > y)$ juist, maar $\exists x \forall y (x > y)$ is onjuist. Op ieder doosje past een deksel, maar er bestaat geen deksel dat op alle doosjes past.

Van een bewering $B(x, y, \dots)$ met quantoren ervoor kunnen we op machinale wijze de ontkenning vormen door de $\forall$ -s door $\exists$ -s te vervangen en omgekeerd, en tevens B door $\neg B$ te vervangen. Ga na, dat de ontkenning van

$$\forall x \exists y \forall z \exists w \exists v \ B(x, y, z, w, v)$$

wordt gevormd door

$$\exists x \forall y \exists z \forall w \forall v \ \neg B(x, y, z, w, v) .$$

Opgave 2.2.8. Ga na, of de volgende uitspraken al dan niet juist zijn:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} [z > x \Rightarrow z > y]$,
2. $\exists x \in \mathbb{R} [x > 3 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R} [(y > x) \vee (y = 1)]]$,
3. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} x < y < z$.

Taalgebruik

Bij het vertalen van ingewikkelde logische formules naar de spreektaal moet men voorzichtig te werk gaan. Men moet een zin bouwen waarin de volgorde der woorden nauwkeurig overeenstemt met de volgorde der logische symbolen (terwijl de gewone omgangstaal meestal vele variaties op de volgorde toelaat). Vaak is het moeilijk, doordat de spreektaal niet de mogelijkheid tot het plaatsen van haakjes heeft.

Deze bezwaren worden vaak ondervangen door het invoeren van nieuwe woorden, die voor een stuk van zo'n formule in de plaats treden. Bijv. de juiste uitspraak

$$\neg \exists x [(x > 0) \wedge \forall y [(y > 0) \Rightarrow x \leq y]] ,$$

die te lezen is als: “er is geen positief getal x dat kleiner is dan elk ander positief getal y ”, kan op die manier, door invoering van de term “kleinste positief getal”, worden bekort tot “er is geen kleinste positief getal”. Dezelfde bewering kan ook worden geschreven als een van de formules hieronder:

$$\neg \exists_{x>0} \forall_{y>0} \ x \leq y ,$$

$$\forall_{x>0} \exists_{y>0} x > y ,$$

(“bij elke positief getal x is er een positief getal y dat nog kleiner is”).

Vaak laat men bij het vertalen de universele symbolen die *aan het begin* van een formule voorkomen, eenvoudig weg. Men zegt bijv.: “het kwadraat een een reëel getal is groter of gelijk 0” i.p.v. “voor elk reëel getal is het kwadraat ≥ 0 ”. En men zegt $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ i.p.v. $\forall_{a,b} (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. In eenvoudige gevallen schrijft men soms de universele operator ook wel *achter* de bewering. Als universele symbolen met existentiële symbolen gecombineerd worden, mag men er beslist niet zo nonchalant mee omspringen.

De ontkenning van een bewering B vertaalt men het veiligste door: “het is niet waar dat B ”. Pas daarna kan men nagaan welke taalkundige vereenvoudigingen die zin toelaat. Vaak wordt de zin onduidelijk in de schrijftaal doordat de betekenis sterk van de intonatie gaat afhangen. In verband met de gewoonte om $\forall$ -symbolen aan het begin van een zin weg te laten, is bijzondere voorzichtigheid geboden. De ontkenning van $B(x)$ is $\neg B(x)$. Bedoelt men echter met $B(x)$ eigenlijk $\forall_x B(x)$, dan is de ontkenning niet $\forall_x \neg B(x)$ maar $\neg \forall_x B(x)$ of, wat hetzelfde is, $\exists_x \neg B(x)$. In het laatste geval mag de quantor dus beslist niet worden weggelaten.

Nog enkele voorbeelden van taalkundige bezuinigingen:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} [x > 0 \Rightarrow B(x)]$$

betekent: “Voor alle x geldt, dat als $x > 0$ is, ook $B(x)$ waar is”. Korter: “Voor alle positieve x geldt $B(x)$ ”. In formule schrijven we ook

$$\forall_{x>0} B(x) .$$

Evenzo heet:

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} [(x > 0) \wedge B(x)]$$

“Er is een x die aan $x > 0$ en tegelijk aan $B(x)$ voldoet”. Korter: “Er is een positieve x waarvoor $B(x)$ geldt”. Of in formule

$$\exists_{x>0} B(x) .$$

Een zeker gevaar in de taal schuilt in het woord “is”, dat meestal niet gelijkheid of equivalentie, maar een gecamoufleerde implicatie aanduidt. Laat $S(x)$ de zin “ x is een schoorsteenveger” en $M(x)$ de zin “ x is een mens” voorstellen. Nu bedoelt men met de zin “Een schoorsteenveger is een mens” te zeggen, dat $\forall_x [S(x) \Rightarrow M(x)]$ en niet dat $\forall_x [S(x) \Leftrightarrow M(x)]$. Daarom doen we beter om een iets sterkere formulering te kiezen als we een equivalentie bedoelen.

Merk op, dat een zin als “een hond is geen vis” wél equivalent is met “een vis is geen hond”, en zelfs met “geen vis is een hond” en “geen hond is een vis” (dit hangt samen met het feit dat de uitspraken $A \Rightarrow \neg B$ en $B \Rightarrow \neg A$ hetzelfde betekenen).

De spreektaal kent nog enkele quantoren waarvoor we geen speciaal symbool invoeren. We kunnen ze echter in $\forall$ ’s en $\exists$ ’s uitdrukken, en desgewenst uitsluitend in $\forall$ ’s of uitsluitend in $\exists$ ’s. We geven er enkele aan met mogelijke vertalingen in formules erbij:

Geen enkele x voldoet aan $B(x)$	$\forall_x \neg B(x)$
of	$\neg \exists_x B(x)$
Niet elke x voldoet aan $B(x)$	$\neg \forall_x B(x)$
of	$\exists_x \neg B(x)$
Hoogstens één x voldoet aan $B(x)$	$\neg \exists_{x,y} x \neq y \wedge B(x) \wedge B(y)$
of	$\forall_{x,y} (B(x) \wedge B(y) \Rightarrow x = y)$
Eén en slechts één x voldoet aan $B(x)$	$\exists_x (B(x)) \wedge \forall_y [B(y) \Rightarrow x = y]$
of	$\exists!_x B(x)$.

Slotopmerking.

Het is zeker niet aan te raden om het logisch denken voortaan door het mechanisch werken met symbolen te vervangen. (Daarin kun je heel ver gaan, maar de informatie in deze paar pagina's is daarvoor te gering.) We gebruiken de logische formules voor het formuleren van wiskundige gedachten. Daarbij zijn formules vaak veiliger (preciezer, met minder kans op misverstand) zijn dan de gewone taal. Als je een beetje aan formules gewend bent zijn ze ook veel gemakkelijker te lezen dan gewone taal.

2.3 Verzamelingen

We doen alsof het begrip “*verzameling*” bekend is. De objecten waaruit een verzameling is opgebouwd heten de *elementen* van de verzameling. Het feit dat een object a een *element* is van een verzameling V , wordt uitgedrukt door de formule $a \in V$. De ontkenning daarvan is $a \notin V$.

Verzamelingen kunnen op verschillende manieren worden beschreven.

- Door (als dat kan) de elementen in zekere volgorde op te noemen. Bijv. de verzameling die bestaat uit de getallen 3, 8, 11. Deze verzameling, geven we aan met $\{3, 8, 11\}$. De elementen van een verzameling hebben geen volgorde, dat betekent dat $\{3, 8, 11\}$ hetzelfde betekent als bijv. $\{8, 3, 11\}$.
- Door het noemen van een eigenschap: de verzameling is dan de verzameling van alle objecten die deze eigenschap hebben. Drukken we de eigenschap uit door $B(x)$ (d.w.z. een ding heeft de eigenschap dan en slechts dan als het bij substitutie $B(x)$ tot een ware uitspraak maakt), dan geven we de verzameling aan met

$$\{x \mid B(x)\}.$$

- Voorbeelden: $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\}$ stelt voor de verzameling van alle reële getallen > 2 .
- Door het construeren met behulp van een andere verzameling. Beschouw bijv. de verzameling van alle getallen die ontstaan door in de uitdrukking $x^2 + x$ een geheel getal te substitueren. Deze geven we aan met

$$V = \{x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\},$$

waarin $\mathbb{Z}$ de verzameling van alle gehele getallen voorstelt. Men zou ook met de eerder genoemde notatie kunnen volstaan door te schrijven:

$$V = \{y \mid y = x^2 + x \wedge x \in \mathbb{Z}\}.$$

Het feit dat bijv. 0 “om twee redenen” tot V behoort, ($0^2 + 0 = 0$ en $(-1)^2 + (-1) = 0$) doet niet terzake. Een getal behoort tot V of het behoort niet tot V ; een element kan niet “dubbel tot V behoren”.

Soms is het handig ook een verzameling zonder elementen (met nul elementen) te beschouwen,. Zo'n verzameling noemen we de *lege verzameling* in (notatie $\emptyset$).

Zeer vaak zullen we uitspraken tegenkomen van het type: “alle elementen van V hebben de eigenschap B ”, dus

$$\forall_x [(x \in V) \Rightarrow B(x)].$$

Deze formules korten we af tot:

$$\forall_{x \in V} B(x).$$

Evenzo wordt de uitspraak: “Er is een element in V dat de eigenschap B ” heeft, dus

$$\exists_x [(x \in V) \Rightarrow B(x)],$$

afgekort tot:

$$\exists_{x \in V} B(x).$$

Men past zo’n afkorting ook toe in gevallen als

$$\forall_x [(x > 1) \Rightarrow B(x)],$$

wat wordt afgekort tot

$$\forall_{x > 1} B(x),$$

waarbij de subscript $x > 1$ een afkorting is voor $x \in \{y \mid y > 1\}$.

In wiskunde-teksten vinden we ook vaak regels als:

$$B(x) \quad (x \in V).$$

Daarmee wordt bedoeld: $\forall_{x \in V} B(x)$.

Zo’n notatie wordt echter nooit gebruikt voor de existentiebewering $\exists_{x \in V} B(x)$.

Inclusierelatie

Zijn V_1 en V_2 verzamelingen en is $\forall_{x \in V_1} x \in V_2$ dan heet V_1 een *deelverzameling* van V_2 . Dit wordt genoteerd als $V_1 \subset V_2$ of $V_2 \supset V_1$. In het bijzonder geldt voor elke verzameling dat $V \subset V$ en $\emptyset \subset V$.

Wanneer $V_1 \subset V$ en $V_1 \neq V$, (dan is er dus een $x \in V$ waarvoor $x \notin V_1$) dan noemen we V_1 een *echte deelverzameling* van V .

Doorsnede

Zijn V_1 en V_2 verzamelingen, dan heet de verzameling

$$\{x \mid x \in V_1 \wedge x \in V_2\}$$

de *doorsnede* van V_1 en V_2 . We geven die aan met $V_1 \cap V_2$.

Als geldt $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dan heten V_1 en V_2 *disjunct*.

Vereniging

Zijn V_1 en V_2 verzamelingen, dan heet de verzameling

$$\{x \mid x \in V_1 \vee x \in V_2\}$$

de *vereniging* van V_1 en V_2 . We geven die aan met $V_1 \cup V_2$.

Verschil

Zijn V_1 en V_2 verzamelingen, dan heet de verzameling

$$\{x \mid x \in V_1 \wedge x \notin V_2\}$$

het *verschil* van V_1 en V_2 . We geven die aan met $V_1 \setminus V_2$.

Cartesisch product

Laat V en W twee verzamelingen zijn met elementen van willekeurige aard. We vormen nu de nieuwe verzameling bestaande uit alle symbolen (v, w) , waarin v een element van V en w een element van W is. Deze verzameling van paren geven we met $V \times W$ aan:

$$V \times W = \{(v, w) \mid (v \in V) \wedge (w \in W)\}.$$

Deze $V \times W$ heet het *Cartesisch product* van V en W (naar aanleiding van het feit dat Descartes de punten van het platte vlak interpreteerde als getallenparen (x, y) , waarin x en y de coördinaten van het betreffende punt voorstellen). Het is ook mogelijk om een Cartesisch product van méér verzamelingen te maken, bijv. $V \times W \times Z$.

Opgave 2.3.1. Bewijs dat voor alle verzamelingen V_1, V_2 en V_3 geldt:

1. $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$.
2. $(V_1 \cup V_2) \cup V_3 = V_1 \cup (V_2 \cup V_3)$.
3. $V_1 \cap (V_2 \cup V_3) = (V_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap V_3)$.
4. $V_1 \cup (V_2 \cap V_3) = (V_1 \cup V_2) \cap (V_1 \cup V_3)$.
5. $V_1 \cup V_2 = (V_1 \setminus V_2) \cup (V_1 \cap V_2) \cup (V_2 \setminus V_1)$.
6. $(V_1 \cup V_2) \setminus V_3 = (V_1 \setminus V_3) \cup (V_2 \setminus V_3)$.

Verzamelingen met een structuur

Grote delen van de wiskunde houden zich bezig met verzamelingen die een extra structuur bezitten. De belangrijkste structuren zijn (1) een optelling of (2) een vermenigvuldiging. Heel belangrijk is ook de combinatie van een (scalaire) vermenigvuldiging en een optelling. We zullen die veel tegenkomen. Een korte beschrijving van de belangrijkste structuren staat in sectie 2.12. Eenvoudiger structuren kunnen ook interessant zijn. Een voorbeeld daarvan is de metriek (zoiets als een afstand tussen de elementen). Een metriek behandelen we uitgebreid in sectie 3.1.

2.4 Natuurlijke getallen

Met *natuurlijke getallen* bedoelen we de getallen 1, 2, 3, 4, ... Dat zijn dus de positieve gehele getallen. In deze rij is een volgorde aanwezig: 2 volgt op 1, 3 volgt op 2, enz. We noteren dat even door te schrijven $2 = \text{volgt}(1)$, $3 = \text{volgt}(2)$, enz.. De volgorde geeft dus een structuur aan de verzameling der gehele getallen. We begrijpen wel volgens welke regels dit werkt, maar we kunnen de regels niet bewijzen (niet beredeneren waarom regels correct zijn) We zullen die regels daarom als axioma's³ aannemen. We komen dan tot het volgende axiomasysteem, dat in 1899 door Peano voor het systeem $\mathbb{N}$ der natuurlijke getallen werd opgesteld.

Axioma A Er is een element in $\mathbb{N}$ dat de naam 1 draagt.

Axioma B Er is een toevoeging die aan elke $n \in \mathbb{N}$ een nieuwe $m \in \mathbb{N}$ toevoegt. We geven dat aan met $m = \text{volgt}(n)$. De afbeelding “volgt” voldoet aan de regels

1. $\forall_{n \in \mathbb{N}} \text{volgt}(n) \neq 1$,
2. $\forall_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}} \text{volgt}(n) = \text{volgt}(m) \Rightarrow n = m$,
3. Als $V \subset \mathbb{N}$ en $1 \in V$ en $\forall_{n \in V} \text{volgt}(n) \in V$ dan $V = \mathbb{N}$.

³Axioma's zijn onbewezen regels die we aannemen, om daaruit de wiskunde op te bouwen.

Op grond van deze axioma's kunnen, nadat optelling, vermenigvuldiging, ongelijkheden, etc. zijn gedefinieerd, alle bekende eigenschappen van de natuurlijke getallen worden afgeleid [10, 15]. Dan blijkt ook dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\text{volgt}(n) = n + 1$.

Volledige inductie

Op de in Axioma B nummer 3 uitgedrukte eigenschap (en ook op de formule $\text{volgt}(n) = n + 1$) berust de bewijsmethode der *volledige inductie*. Dit is een methode om een formule van het type $\forall_{k \in \mathbb{N}} B(k)$ te bewijzen. De methode bestaat uit twee stappen:

1. Men bewijst $B(1)$.
2. Men bewijst $\forall_{k \in \mathbb{N}} B(k) \Rightarrow B(k + 1)$. D.w.z.: uit de onderstelling dat $B(k)$ juist is, leidt men af dat $B(k + 1)$ juist is. Hiermee is $B(k)$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ bewezen.⁴

Opmerking: In gewone taal is het vaak veilig twee verschillende letters (k en n) te gebruiken. Je kan dan volledige inductie formuleren als: “Is $B(k)$ juist voor $k = n$, dan is $B(k)$ juist voor $k = n + 1$ ”. Je moet oppassen voor onzin zoals: “Is $B(n)$ juist voor n , dan is $B(n)$ juist voor $n + 1$ ” of: “dan is $B(n)$ juist voor $n = n + 1$ ”.

Voorbeeld 2.4.1. Te bewijzen, dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k + 1)^2.$$

Bewijs: Voor $k = 1$ is de formule juist. Nu de inductiestap: We moeten bewijzen, dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = \frac{1}{4}(n + 1)^2(n + 2)^2.$$

We moeten dus bewijzen

$$\frac{1}{4}n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^3 = \frac{1}{4}(n + 1)^2(n + 2)^2.$$

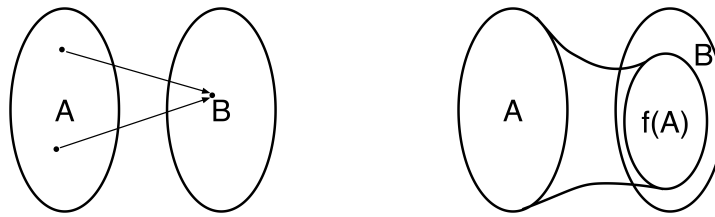
wat we eenvoudig kunnen laten zien. □

Opmerking 2.4.2. De merkwaardige situatie doet zich vaak voor, dat een sterkere bewering gemakkelijker door inductie is te bewijzen dan een zwakkere. Zo is bijv. de uitspraak dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ de som $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ het kwadraat van een geheel getal is, een juiste bewering, want in het voorbeeld hierboven hebben we een sterkere bewering bewezen: het is het kwadraat van $\frac{1}{2}n(n + 1)$. Voor de zwakkere stelling mislukt het inductiebewijs echter. Uit “ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ is een kwadraat” volgt niet op eenvoudige wijze “ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n + 1)^3$ is een kwadraat”. Jammer genoeg is de uitspraak “een kwadraat $+(n + 1)^3$ is weer een kwadraat” onjuist. Vaak is het een grote kunst om voor een bepaald doel een inductief bewijsbare bewering op te stellen.

2.5 Afbeeldingen

Een *afbeelding* of een *functie* f van A naar B (de notatie is $f : A \rightarrow B$) is een voorschrift waardoor aan elk element van A precies één element van B wordt toegevoegd. Als b (waarvoor $b \in B$) aan

⁴Want als we de verzameling getallen beschouwen waarvoor $B(k)$ waar is: $V = \{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge B(k)\}$, dan is $1 \in V$ en $\forall_k [k \in V \Rightarrow \text{volgt}(k) \in V]$, zodat $V = \mathbb{N}$. Derhalve geldt $B(k)$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.



Figuur 2.1: Een niet injectieve (links) en een niet surjectieve (rechts) afbeelding.

a (met $a \in A$) wordt toegevoegd, dan schrijven we ook wel $b = f(a)$ of ook wel $f : a \mapsto b$. We noemen b het beeld van a .

Een afbeelding $f : A \rightarrow B$ is gelijk aan de afbeelding $g : C \rightarrow D$ wanneer: (i) $A = C$, èn (ii) $B = D$, èn (iii) $f(a) = g(a)$ voor alle $a \in A$. Slordig spreekt men vaak van de afbeelding f ipv $f : A \rightarrow B$. Functie is voor ons synoniem met afbeelding.

Het beeld van een (deel)verzameling

Is $f : A \rightarrow B$ en $A_0 \subset A$ dan geven we *het beeld van A_0* aan met $f(A_0) := \{f(x) \mid x \in A_0\}$. Er geldt dus $f(A_0) \subset B$.

Injectie

de afbeelding $f : A \rightarrow B$ heet *injectief* (of één-éénduidig, of ook wel een *injectie*) als voor alle $x, y \in A$ geldt dat uit $f(x) = f(y)$ volgt $x = y$. In formule

$$f : A \rightarrow B \text{ is een injectie} \quad := \quad \forall_{x,y \in A} \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Surjectie

de afbeelding $f : A \rightarrow B$ heet *surjectief* (of een *surjectie*) en we zeggen: f beeldt A op B af, als $f(A) = B$. In formule

$$f : A \rightarrow B \text{ is een surjectie} \quad := \quad \forall_{b \in B} \exists_{a \in A} \quad f(a) = b.$$

Bijjectie

de afbeelding $f : A \rightarrow B$ heet *bijjectief* (of een *bijjectie*) als f zowel een injectie als een surjectie is. In formule

$$f : A \rightarrow B \text{ is een bijjectie} \quad := \quad \forall_{b \in B} \exists!_{a \in A} \quad f(a) = b.$$

Een bijjectie wordt ook wel een *éénéénduidige afbeelding* genoemd.

Inverse afbeelding

Als de afbeelding $f : A \rightarrow B$ een *bijjectie* is, dan heet de afbeelding $f^{-1} : B \rightarrow A$ die gedefinieerd wordt door $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ de *inverse* van f .

We merken op dat voor een *surjectie* $f : A \rightarrow B$ gegarandeerd is dat voor elke $b \in B$ er een

bijbehorende $a \in A$ bestaat. Daarom kunnen we in dat geval een functie $g : B \rightarrow A$ bepalen zodat $f(g(b)) = b \ \forall b \in B$; de functie g heet dan de *rechts-inverse* van f .⁵ Er zijn misschien wel verschillende mogelijkheden om zo'n g te bepalen.

We merken op dat voor een *injectie* $f : A \rightarrow B$ gegarandeerd is dat voor elke $a \in A$ er een één-uidige functie $g : f(A) \rightarrow A$ bestaat zodat $\forall a \in A \ g(f(a)) = a$. Zo'n functie g heet de *linksinverse* van f .⁶

Als een functie dus bijtief is, dan behoort bij elk punt van A precies één punt van B , en omgekeerd. (Bijtief betekent injectief en surjectief: er bestaat een linksinverse en een rechtsinverse, maar deze zijn dezelfde $g : B \rightarrow A$. Deze g wordt nu kortweg de *inverse* van $f : A \rightarrow B$ genoemd. Kennelijk is $\forall v \in V \ g(f(v)) = v$ en $\forall w \in V \ f(g(w)) = w$.

Voorbeeld 2.5.1. Laat V de verzameling van alle gehele getallen zijn, en zij F de afbeelding van V in zichzelf, gedefiniëerd door:

$$F(x) = x + 1 \quad (x \in V).$$

Door welke formule is de inverse afbeelding gegeven?

Samengestelde afbeelding

Laten $f : A \rightarrow B$ en $g : C \rightarrow D$ afbeeldingen zijn en laat $A_0 \subset A$ en $f(A_0) \subset C$, dan heet de afbeelding $g \circ f : A_0 \rightarrow D$ gedefiniëerd door $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \ \forall a \in A_0$ de *samengestelde afbeelding* van f en g .

2.6 ** René Descartes **

René Descartes (1596–1650) was een filosoof die in zijn werk *La Géométrie* de algebra op de meetkunde toepaste en daarmee de eerste schreden zette in de richting van het vak dat we nu Analytische Meetkunde noemen.

Descartes kreeg zijn opvoeding in het Jesuïtencollege van La Flèche in Anjou. Hij kwam naar dit college op achtjarige leeftijd, een paar maanden nadat het college geopend was in Januari 1604. Hij studeerde er tot 1612 en leerde er klassieke talen, logica en de traditionele Aristotelische filosofie. Hij leerde ook wiskunde uit de boeken van Clavius. Omdat hij een zwakke gezondheid had mocht hij op school tot 11 uur 's ochtends in bed blijven, een gewoonte die hij aanhield tot een jaar voor zijn dood.

De school had Descartes doen inzien hoe weinig hij wist. Het enige vak dat dat in zijn ogen voldeed was wiskunde. Deze gedachte was de grondslag voor zijn manier van denken en het werd ook de basis voor zijn gehele werk.

Descartes verbleef enige tijd in Parijs, waar hij blijkbaar nogal in zichzelf gekeerd was. Daarna ging hij studeren aan de Universiteit van Poitiers. In 1616 kreeg hij in Poitiers een graad in de rechten en hij gaf zich daarna op bij de militaire academie in Breda. In 1618 ging hij wiskunde en mechanica studeren bij de Nederlandse geleerde Isaac Beeckman en begon hij zijn onderzoeken naar een allesomvattende natuurwetenschap. Na twee jaar in Holland begon hij een aantal reizen door Europa.

In 1619 voegde hij zich bij het Beierse leger. Van 1620 tot 1628 reisde Descartes verder door Europa en verbleef enige tijd in Bohemen (1620), Hongarije (1621), Duitsland, Holland

⁵Een surjectie f heeft een rechtsinverse g zodat $f(g(b)) = b$.

⁶Een injectie f heeft een linksinverse g zodat $g(f(a)) = a$.

en Frankrijk (1622-23). In 1623 verbleef hij nog enige tijd in Parijs, waar hij in contact kwam met Mersenne, een belangrijk wiskundige die hem vele jaren met de wetenschappelijke wereld in contact hield. Van Parijs reisde hij naar Italië waar hij enige tijd in Venetië verbleef, waarna hij weer naar Frankrijk terugkeerde (1625).



Figuur 2.2: Descartes

Tegen 1628 was Descartes het voortdurend reizen moe en besloot hij zich ergens te vestigen. Hij dacht er goed over welk land hem het best zou passen en hij koos Holland. Dat lijkt een juiste beslissing die hij blijkbaar de volgende twintig jaar niet betreurde.

Al snel nadat hij zich in Holland gevestigd had begon hij zijn eerste grote verhandeling over de natuurkunde *Le Monde, ou Traité de la Lumière*. Dit werk was bijna af toen hij het bericht hoorde dat Galileo was veroordeeld tot huisarrest. Misschien verstandig, besloot hij geen risico te nemen met de publicatie van het werk, en daardoor werd het -gedeeltelijk- pas na zijn dood gepubliceerd.

Later legde hij deze richtingsverandering uit door te zeggen: *“om vrij te kunnen zeggen hoe ik erover dacht, zonder verplicht te zijn de meningen die geleerden erover hebben te volgen of af te wijzen, besloot ik deze hele wereld hier aan hun disputen over te laten en alleen te spreken over wat er zou gebeuren op een nieuwe wereld, als God nu ergens in een imaginaire ruimte genoeg materie zou scheppen om er een te maken ...en dat Hij daarna niets anders deed dan de natuur zijn gewone gang te laten gaan en haar laten handelen volgens de wetten die Hij heeft ingesteld.”*

In Holland had Descartes een aantal vrienden in de wetenschap en ook het voortdurende contact met Mersenne. Zijn vriendschap met Beeckman ging door en hij had ook contact met Mydorge, Huygens en Frans van Schooten (de oudere).

Zijn vrienden spoorden Descartes aan zijn ideeën te publiceren en, hoewel hij *La Monde* nog steeds niet wilde publiceren, schreef hij een verhandeling met de titel *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. (verhandeling over de methode om zijn verstand goed te besturen en de waarheid in de wetenschappen te zoeken). Drie appendices bij dit werk waren: *La Dioptrique*, *les Météores*, en *La Géométrie*. De verhandeling werd gepubliceerd in Leiden in 1637 en Descartes schreef aan Mersenne:

In de La Dioptrique en de les Météores heb ik gepoogd te laten zien dat mijn Methode niet van de straat is en in mijn Géométrie heb ik het bewezen.

Het werk beschrijft wat Descartes als een meer bevredigende manier ziet om kennis te verwerven dan het aanleren van de Aristotelische kennis. Alleen wiskunde is zeker, heeft Descartes het gevoel, en daarom moet alles op de wiskunde gebaseerd worden.

La Dioptrique is een werk over de optica en, hoewel Descartes geen voorlopers citeert mbt de ideeën die hij naar voren brengt, staat er in feite weinig nieuws in. Maar zijn houding ten opzichte van experimenten was een belangrijke bijdrage.

Les Météores is een werk over meteorologie en is belangrijk omdat het het eerste werk is dat probeert de studie van het weer een wetenschappelijke basis te geven. Echter, veel van de beweringen die hij doet zijn niet alleen fout, maar door een paar heel eenvoudige experimenten kan dat zelfs direkt aangetoond worden. Roger Bacon, bijvoorbeeld, had al aangetoond dat het wijd verspreide geloof dat gekookt water sneller bevriest onjuist was. Maar Descartes beweert: *...en we zien uit ervaring dat water dat enige tijd op een vuur gezet is sneller bevriest dan anders. De reden is dat die delen van het water die het gemakkelijkst vouwen en buigen eruit verdreven zijn door de verwarming, daarbij alleen de stijvere delen achterlatend.*

Ondanks de vele fouten, was het onderwerp ‘meteorologie’ op de kaart gezet na de publicatie van *Les Météores*, en het onderzoek werd voortgezet door Boyle, Hooke en Halley.

La Géométrie is verreweg het belangrijkste deel van het werk. In [14] noemt Scott vier belangrijke punten van dit werk:

1. via de algebra wordt in de meetkunde op een heel natuurlijke manier het begrip verhouding ingevoerd;
2. algebra maakt het mogelijk in de meetkunde bepaalde patronen en verbanden te herkennen die in een meetkundig jasje niet goed te zien zijn;
3. Descartes maakt de eerste stap naar de invariantentheorie, die in een latere fase het coördinatenstelsel kan opheffen waardoor willekeur verwijderd wordt;
4. door de algebra kan de oplosbaarheid van meetkundige problemen heel snel, volledig en elegant vastgesteld worden. Zonder algebra is het praktisch onmogelijk.



Figuur 2.3: Descartes

Descartes' *Meditationes De Prima Philosophia*, gepubliceerd in 1641, was bedoeld voor de filosoof en de theoloog. Het bestaat uit 6 overpeinzingen (meditationes); (i) dingen die we mogen betwijfelen, (ii) over de natuur van de menselijke geest, (iii) over God, dat hij bestaat, (iv) over het ware en het onware, (v) over het wezen van materiële dingen, en (vi) over het bestaan van materiële dingen en het werkelijke onderscheid tussen lichaam en geest.

Het meest uitgebreide werk van Descartes is *Principia Philosophiae*, gepubliceerd in Amsterdam in 1644. Het werk bestaat uit vier delen: (i) De beginselen van de menselijke kennis, (ii) De

Sommige ideeën uit *la Géométrie* zouden ontleend kunnen zijn aan het werk van Oresme (ca.1323 - 1382), maar in Oresme's werk zien we niet dat algebra met meetkunde verbonden wordt. In zijn "Treatise on Algebra" (1688) beweert Wallis dat de ideeën in *la Géométrie* ontleend zijn aan Thomas Harriot (1560 - 1621)⁷. Wallis schrijft: *...Descartes las de Praxis, en ieder regel van Descartes' analyse laat deze indruk achter.*

Weinig lijkt Wallis' claim te rechtvaardigen behalve een gevoel van patriottisme en misschien de wens om Harriot meer credit voor zijn werk te geven. Harriot's werk op het gebied van vergelijkingen kan inderdaad invloed gehad hebben op Descartes, die zelf altijd –duidelijk ten onrechte– claimde dat niets in zijn werk door anderen beïnvloed was.

⁷Harriot publiceerde geen wiskundig werk tijdens zijn leven. Zijn werk over algebra *Artis Analyticae Praxis at Aequationes Algebraicas Resolvendas* (1631) werd 10 jaar na zijn dood gepubliceerd en werd verzorgd door mensen die het werk niet volledig apprecieerden.

beginselen van de materiële objecten, (iii) De zichtbare wereld, en (iv) De aarde. Het probeert het hele universum op wiskundige grondslag tot een studie van de mechanica te reduceren.

Dit is een belangrijk gezichtspunt en wees de weg vooruit. Descartes geloofde niet aan werking op afstand. Daarom kon er volgens hem ook geen vacuum om de aarde zijn, anders was er geen manier om krachten over te brengen. In veel opzichten is Descartes' theorie, waar krachten door contact tot uitdrukking komen, veel bevredigender dan het mysterieuze effect waardoor zwaartekracht op afstand kan werken.

Toch laat Descartes' mechanica nog veel te wensen over. Hij neemt aan dat het universum met materie gevuld is die, als gevolg van een initiële beweging terecht is gekomen in een stelsel van wervels die de zon, de sterren, de planeten en de kometen in hun baan houden. Ondanks de problemen met de werveltheorie was dit inzicht ongeveer honderd jaar in Frankrijk favoriet, zelfs nadat Newton had aangetoond dat zo'n systeem onmogelijk was. Zoals Brewster, één van Newtons 19de-eeuwse biografen, het stelt: *het Cartesiaanse systeem had zich zo ingegraven dat het niet verwonderlijk was dat zuivere en sublieme doctrines van (Newton's) Principia met wantrouwen werden ontvangen .. Men kon niet makkelijk toegeven aan de idee dat de grote massa's der planeten in de lege ruimte hingen en op afstand in hun baan gehouden werden door onzichtbare krachten*

Voor de hand liggend als Descartes' theorie ook was, zelfs de supporters van zijn natuurfilosofie, zoals de theoloog Henry More uit Cambridge, hadden bezwaren. Het is zeker dat More bewondering had voor Descartes toen hij schreef: *Ik zie Des-Cartes als een man die het meest waarachtig geïnspireerd is in de kennis der Natuur, dan enig ander die zich er deze 1600 jaar mee hebben beziggehouden ...*

In 1644, het jaar waarin de Meditaties werden gepubliceerd, bezocht Descartes Frankrijk. Hij kwam er terug in 1647 en ontmoette toen Pascal en had met hem een discussie over het bestaan van het vacuum.

In 1649 overtuigde koningin Christina van Zweden Descartes om naar Stockholm te komen. Maar de koningin wilde 's ochtends om 5 uur raaklijnen tekenen, en Descartes brak met zijn levenslange gewoonte om om 11 uur op te staan. Al na een paar maanden in het noordelijke klimaat, waarin hij iedere ochtend om 5 uur naar het paleis wandelde, stierf hij aan een longontsteking.

2.7 Equivalentierelaties

Binaire relatie

Een *binaire relatie* op een verzameling V is een relatie die kan bestaan tussen twee elementen van de verzameling V . Er zijn veel voorbeelden van zulke relaties⁸, zoals

1. De gelijkheid op een willekeurige verzameling: $u\mathcal{R}v$ dan en slechts dan als $u = v$.
2. Op de verzameling der gehele getallen: de relaties $<, >, \leq, \geq$.
3. In de verzameling van alle figuren van het platte vlak: de relaties $\sim$ (gelijkvormigheid) en $\cong$ (congruentie).
4. In de verzameling van alle punten van het platte vlak, de relatie die aanduidt, dat de afstand tussen u en v kleiner is dan 1.
5. In de verzameling van alle rechte lijnen van het platte vlak: de relatie $u//v$ (evenwijdigheid).

⁸Een binaire relatie $\mathcal{R}$ op een verzameling V is dus een afbeelding $\mathcal{R} : V \times V \rightarrow \{\text{waar, onwaar}\}$.

Het begrip ‘binaire relatie’ kunnen we als volgt formaliseren⁹. We gaan uit van het Cartesisch product $V \times V$, dat is dus de verzameling van paren

$$\{(u, v) \mid u \in V, v \in V\},$$

Als we de relatie aangeven met $\mathcal{R}$, dan is dus soms $u\mathcal{R}v$ waar en soms onwaar. De relatie $\mathcal{R}$ is dan ook volledig gekarakteriseerd door de deelverzameling van $V \times V$ waarvoor $u\mathcal{R}v$ waar is:

$$R = \{(u, v) \mid u \in V, v \in V, u\mathcal{R}v \text{ is waar}\} \subset V \times V.$$

Het is duidelijk dat uit $u\mathcal{R}v$ niet $v\mathcal{R}u$ hoeft te volgen.

Equivalentierelatie

Een binaire relatie $\mathcal{R}$ op V heet een *equivalentierelatie* als $\mathcal{R}$ aan de volgende eisen voldoet:

- E1.** $\forall_{v \in V} [v\mathcal{R}v]$, d.i. $\mathcal{R}$ is *reflexief*
E2. $\forall_{u, v \in V} [u\mathcal{R}v \Rightarrow v\mathcal{R}u]$, d.i. $\mathcal{R}$ is *symmetrisch*
E3. $\forall_{u, v, w \in V} [u\mathcal{R}v \wedge v\mathcal{R}w \Rightarrow u\mathcal{R}w]$, d.i. $\mathcal{R}$ is *transitief*.

We merken op dat de voorbeelden 1, 3 en 5 hierboven equivalentierelaties vormen (als men bij 5 tenminste twee samenvallende lijnen ook nog evenwijdig noemt). In voorbeeld 2: $<$ is niet reflexief en niet symmetrisch, en $\leq$ is wel reflexief maar niet symmetrisch. In voorbeeld 4 is de relatie niet transitief.

Equivalentieklassen

Zij $\sim$ een equivalentierelatie op V . Is v een element van V , dan heet de verzameling

$$\{u \mid u \in V \wedge u \sim v\}$$

de equivalentieklasse van v . Uit **E1**, **E2**, **E3** volgt dat equivalente elementen dezelfde equivalentieklasse hebben. Een deelverzameling van V heet een *equivalentieklasse* als het de equivalentieklasse van een zekere $v \in V$ is. Verder is gemakkelijk in te zien: De equivalentieklassen zijn twee aan twee disjunct en de vereniging van alle equivalentieklassen is V zelf.

Met de relatie $\sim$ correspondeert dus een z.g. *klassenindeling* van V , en wel zo, dat

$$u \sim v \Leftrightarrow u \text{ en } v \text{ liggen in dezelfde klasse.} \quad (2.4)$$

Gaat men omgekeerd uit van een klassenindeling van V , dan kan men een binaire relatie $\sim$ maken door (2.4) als definitie van $\sim$ te beschouwen. Laat zien, dat $\sim$ dan weer aan de drie eisen voor een equivalentierelatie voldoet.

Definitie door abstractie

Het komt in de wiskunde zeer vaak voor, dat men nieuwe begrippen vormt door in een bekende verzameling een equivalentie-relatie te beschouwen en vervolgens over de equivalentieklassen te gaan spreken. De equivalentieklassen zijn dan de nieuwe objecten. Een vertrouwd voorbeeld is de definitie van “aantal”. Men vormt daartoe een equivalentierelatie, waarbij “drie paarden”, “drie appels”, “drie centen”, $\dots$ alle onderling equivalent zijn. De equivalentieklasse duidt men aan met het woord “drie”. Het aantal “drie” heet dan gedefinieerd door abstractie¹⁰.

⁹Formaliseren: op een precieze manier in een formule uitdrukken.

¹⁰abstractie, dwz “aftrekking”. Wat er afgetrokken is, zijn de woorden “paarden”, “appels”, “centen”, $\dots$.

Een ander bekend voorbeeld is dat van “richting”. Beschouw de verzameling V van alle rechten in het platte vlak. De relatie $l \sim m$ zal betekenen $l // m$ (we zeggen dat ook $l // l$). Deze voldoet aan **E1**, **E2**, **E3**. In plaats van nu zeer onduidelijk te zeggen: “een richting is datgene wat gemeenschappelijk is aan een stel evenwijdige lijnen”, definiëren we nu: “een richting is een equivalentieklasse”.

Is R een richting, dan zeggen we, dat de lijn l de richting R heeft (of dat R de richting van l is), als $l \in R$. We concluderen verder: l en m hebben dan en slechts dan dezelfde richting als $l // m$.

Vaak spreekt men bij een definitie door abstractie over identificatie. Men spreekt bijv. over “drie appels”, “drie paarden”, en merkt op een gegeven ogenblik dat de appels en de paarden volmaakt onbelangrijk zijn voor het beoogde doel. Men zegt dan, dat men van de soort der objecten afziet, of dat men “drie appels” en “drie paarden” voortaan als hetzelfde zal beschouwen. Natuurlijk heeft men niet het recht om zoiets zonder meer te zeggen. Waar zouden we zo naar toe gaan? Het “recht” kan echter ontleend worden aan de overgang op equivalentieklassen. Daarbij ontstaat de plicht om de equivalentie te formuleren, en te controleren dat de equivalentie aan de drie eisen voldoet.

Een ander bekend voorbeeld van equivalentieklassen vinden we bij de definitie van rationaal getal: een rationaal getal is een equivalentieklasse van breuken p/q , waarbij p en q gehele getallen zijn.

Laat V een verzameling, en $\sim$ daarop een equivalentierelatie zijn en laat $E(x)$ een uitspraak zijn over elementen van V , die voldoet aan

$$\forall_{x,y \in V} (E(x) \wedge (x \sim y)) \Rightarrow E(y).$$

In zo’n geval is het dikwijls zinvol een uitspraak $E(K)$ in te voeren (waarin K een equivalentieklasse is), die betekent dat $E(x)$ juist is voor alle $x \in K$. Voor elke equivalentieklasse K geldt dat of $E(x)$ juist is voor alle $x \in K$ of onjuist is voor alle $x \in K$. Dan kunnen we voor ieder equivalentieklasse L zeggen dat $E(L)$ juist is of niet juist.

2.8 Machtigheid, kardinaalgetallen

In de collectie van alle verzamelingen voeren we de volgende equivalentierelatie in, die *gelijk-machtigheid* heet. We zeggen, dat de verzamelingen V en W gelijkmachtig zijn ¹¹ (notatie is weer $V \sim W$) als er een éénéénduidige afbeelding van V op W bestaat. Laat zien, dat $\sim$ aan **E1**, **E2**, **E3** voldoet.

Een klasse van onderling gelijkmachtige verzamelingen heet een *kardinaalgetal* of *machtigheid*. Zeer belangrijk is het begrip *eindige verzameling*. We beginnen met op te merken dat, als n , en m natuurlijke getallen zijn, de verzamelingen

$$\{1, 2, \dots, n\} \quad \text{en} \quad \{1, 2, \dots, m\}$$

dan en slechts dan gelijkmachtig zijn als $n = m$. Dit is de z.g. hoofdeigenschap van het tellen.

Een verzameling V heet eindig als er een natuurlijk getal n bestaat zo, dat

$$V \sim \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

en de machtigheid van V wordt dan ook met de letter n aangeduid. We zeggen ook, dat n het aantal elementen van V is. Bovendien wordt ook de lege verzameling eindig genoemd; het betreffende kardinaalgetal wordt met 0 aangeduid.

¹¹‘gelijkmachtig’ is wiskundetaal voor ‘evenveel’.

Is V niet eindig, dan heet V oneindig. We merken op dat *oneindig* een lastig woord is. In sectie 2.9 laten we zien hoe het in een verschillende context verschillende dingen kan betekenen. Ook zijn *oneindige verzamelingen* niet alle onderling gelijkmachtig en kun je laten zien dat een verzameling V dan en slechts dan oneindig is, als V éénéénduidig op een echt deel van V kan worden afgebeeld. Een oneindige verzameling bevat steeds een deelverzameling die gelijkmachtig is met $\mathbb{N}$. We laten het bewijs van deze beweringen achterwege. De machtigheid van de aftelbaar oneindige verzameling wordt aangeduid met $\aleph_0$.

Een oneindige verzameling, V heet *aftelbaar* als $V \sim \mathbb{N}$. We zullen hieronder ook een voorbeeld geven van een niet-aftelbaar oneindige verzameling.

We beschouwen afbeeldingen F van $\mathbb{N}$ op de verzameling $\{0, 1\}$. Zo'n afbeelding $F : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ is dus te beschrijven door een oneindige rij van nullen en enen, bijv.

$$F = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots),$$

die ontstaat door achtereenvolgens $F(1), F(2), F(3), \dots$ op te schrijven. De verzameling van alle mogelijke rijen van dit type noemen we W . Duidelijk is, dat W niet eindig is (heeft men n zulke rijen, dan is er steeds een nieuwe aan te geven). Neem nu aan, dat W aftelbaar is. Er is dan een éénéénduidige afbeelding van V op $\mathbb{N}$, bijv.

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow F_1 = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots), \\ 2 &\rightarrow F_2 = (0, \underline{1}, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots), \\ 3 &\rightarrow F_3 = (1, 0, \underline{1}, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Construeer nu een nieuwe rij als volgt: Beschouw de rij

$$(0, 1, 1, \dots)$$

die ontstaat door de onderstreepte cijfers achter elkaar te zetten. Dat is dus de rij $(F_1(1), F_2(2), F_3(3), \dots)$. Maak uit deze een andere, door overal 0 door 1 en 1 door 0 te vervangen. Noem deze nieuwe rij $\tilde{F}$. Dan is $\tilde{F}$ niet gelijk aan één der F_i , ($i = 1, 2, \dots$) want $\tilde{F}$ wijkt op de n -de plaats van F_n af. Het was dus geen afbeelding van $\mathbb{N}$ op V maar alleen maar in. Dat is in strijd met de onderstelling.

De machtigheid van W heet de *machtigheid van het continuüm* (de naam hangt samen met het feit dat W gelijkmachtig is met de verzameling der reële getallen, maar dat bewijzen we nu niet). Een belangrijke stelling is nog:

Stelling 2.8.1. De vereniging van aftelbaar vele aftelbare verzamelingen is weer aftelbaar.

Bewijs: Laat $V_1, V_2, V_3, \dots$ elk aftelbaar zijn, en zij V de vereniging zijn van alle V_n 's. De elementen van V_k geven we aan met $v_{k1}, v_{k2}, v_{k3}, \dots$.

Nu is V opgebouwd uit de elementen: $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{13}, v_{22}, v_{31}, v_{14}, v_{23}, v_{32}, v_{41}, v_{15}, \dots$. Laat hieruit elk element weg dat reeds eerder voorkwam. Wat overblijft kan worden genummerd. $\square$

Voorbeeld 2.8.2. De verzameling van alle rationale getallen is aftelbaar.

Som en product van kardinaalgetallen

De som van twee kardinaalgetallen is als volgt gedefiniëerd. Laat a en b kardinaalgetallen zijn. Kies een verzameling V die de machtigheid a heeft, en een verzameling W met de machtigheid b . We doen dat op zo'n manier dat de doorsnede van V en W leeg is. Je kunt nagaan dat dat kan. Het kardinaalgetal c van de vereniging $V \cup W$ noemen we nu de som van de kardinaalgetallen

a en b . Gemakkelijk is in te zien, dat c niet afhangt van de speciale keuzen van V en W die we hebben gemaakt. Het product van a en b is gedefiniëerd als de machtigheid van het Cartesische product $V \times W$.

We kunnen laten zien dat de gewone regels voor de optelling en vermenigvuldiging gelden: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$. We laten de bewijzen achterwege, maar eigenlijk is het direct duidelijk.

Zijn a en b eindige kardinaalgetallen, dus niet-negatieve gehele getallen, dan stemmen $a + b$ en ab met de ons bekende som en product overeen.

Stellingen als: “bij gegeven a en b is er hoogstens één x met $a + x = b$ ”, en “hoogstens één y met $ay = b$ ”, gaan echter verloren als men van de eindige kardinaalgetallen op oneindige overstapt. Stellen we de machtigheid der aftelbare verzamelingen door $\aleph_0$ voor, dan is bijv.

$$\begin{aligned}\aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 & \text{en ook} & \quad \aleph_0 + 1 = \aleph_0, \\ \aleph_0 \aleph_0 &= \aleph_0 & \text{en ook} & \quad 2 \aleph_0 = \aleph_0.\end{aligned}$$

Om dit in te zien, bedenke men, dat de vereniging van twee aftelbare verzamelingen weer aftelbaar is, resp. dat de vereniging van aftelbaar vele aftelbare verzamelingen weer aftelbaar is.

2.9 Verschillende betekenissen van het woord oneindig

Het woord “oneindig” (aangegeven met het symbool ∞) wordt in de wiskunde in een aantal uiteenlopende betekenissen gebruikt. In sommige gevallen is het eigenlijk overbodig, maar toch wordt het vaak gebruikt en de betekenis is goed bepaald. We geven enkele voorbeelden:

(a) “als n loopt van 1 tot ∞ ” betekent “ $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ ”.

(b) “als x loopt van 1 tot ∞ ” betekent “ $\forall_{x \geq 1}$ ”.

Eigenlijk blijkt pas uit de context welk van de gevallen (a) of (b) men op het oog heeft. Het feit dat men gehele getallen bij voorkeur met letters als $n, m, k, \dots$ aanduidt, en reële getallen met $a, b, \dots, x, y, \dots$ is daarbij een steun.

Je moet vooral niet denken dat het symbool ∞ een getal voorstelt!

(c) “oneindige verzameling”. De betekenis hiervan is in sectie 2.8 uitgelegd.

(d) “oneindig ver punt” betekent in de meetkunde: “een richting”.

(e) “de rechte op oneindig” betekent: de verzameling van alle richtingen in het platte vlak.

(f) “oneindige rij” betekent: een functie gedefiniëerd op de verzameling der natuurlijke getallen.

Men kan de functiewaarden rangschikken in dezelfde volgorde als de natuurlijke getallen zelf, en schrijft dan

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

als a_n het ding voorstelt dat door de functie aan het natuurlijke getal n is toegevoegd.

(g) “oneindige reeks” betekent: een uitdrukking van de vorm

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{of} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i,$$

d.w.z. een (aftelbare) rij getallen verbonden door plustekens.

(h) “oneindig interval” betekent: een verzameling reële getallen van de vorm $\{x \mid x > a\}$ of $\{x \mid x \geq a\}$ enz.. Om deze intervallen aan te duiden gebruikt men wel vaak het symbool ∞ .

Het interval $x > a$ wordt met (a, ∞) aangeduid. Ook een symbool $-\infty$ komt hier op het toneel: $\{x \mid x < a\}$ wordt met $(-\infty, a)$ genoteerd.

(i) Is f de functie, gedefiniëerd door:

$$\forall_{x \neq 1} \quad f(x) = \frac{1}{x-1},$$

dan is voor $x = 1$ de functie niet gedefinieerd. Uit een soort ergernis daarover en in verband met het feit dat $f(x)$ in absolute waarde zeer groot is, als x erg dicht bij 1 ligt, zegt men wel eens “ $f(1)$ is oneindig”. Dit is een gevaarlijk gebruik, dat zoveel mogelijk vermeden moet worden. Het lijkt n.l. een uitspraak te zijn over $f(1)$, maar $f(1)$ is niet gedefinieerd!

(j) “ n nadert tot oneindig”. Dit betekent op zichzelf helemaal niets. Slechts zekere samenstellingen hebben betekenis, als: a_n nadert tot b als n tot oneindig nadert. We zijn gewend te noteren als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, wat betekent ⁽¹²⁾

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

(k) Aan $\mathbb{C}$, het systeem der complexe getallen, voegt men wel eens een extra element toe dat ∞ wordt genoemd. Dit completeert het complexe getallenvlak tot de z.g. complexe bol. Evenzo voegt men wel eens aan het systeem der reële getallen twee nieuwe elementen toe, n.l. $-\infty$ en $+\infty$ waardoor, het z.g. systeem der generaliseerde reële getallen ontstaat.

2.10 Ontwikkeling van het getalbegrip

Oorspronkelijk betekende het woord “getal” gewoon “aantal”, of –in wiskundetaal– “natuurlijk getal”. Langzamerhand is men de betekenis van het woord ‘getal’ gaan uitbreiden. Tegenwoordig is de betekenis van het woord getal tot stilstand gekomen, om “complex getal” aan te duiden. In veel gevallen zal men het echter nog in beperkter zin gebruiken. Welke zin dat is, blijkt meestal uit het verband. We onderscheiden de volgende getallenverzamelingen:

1. Natuurlijke getallen (1, 2, 3, ...), aangegeven met $\mathbb{N}$. Sommige auteurs rekenen ook de 0 tot de natuurlijke getallen; wij zullen dit niet doen. Wij gebruiken de notatie $\mathbb{N}_0 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$.
2. Gehele getallen, aangegeven met $\mathbb{Z}$. Ontstaan door de negatieve gehele getallen -1, -2, ... en de 0 aan het systeem der natuurlijke getallen toe te voegen.
De negatieve getallen zijn bedacht om alle vergelijkingen $a + x = b$ te kunnen oplossen, voor willekeurige natuurlijke getallen a en b .
3. Rationale getallen, aangegeven met $\mathbb{Q}$. Ontstaan door aan het vorige systeem de breuken toe te voegen.
De breuken zijn bedacht om alle vergelijkingen $a \cdot x = b$ te kunnen oplossen, voor willekeurige gehele getallen a en b .
Een rationaal getal is dus een equivalentieklasse van breuken

$$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Reële getallen, aangegeven met $\mathbb{R}$. Ontstaan door de z.g. irrationale getallen toe te voegen. Irrationale getallen zijn bedacht om Cauchy-rijen een limiet te kunnen geven. Een Cauchy-rij is een oneindige rij rationale getallen a_n waarvan alle getallen in de staart $\{a_m\}_{m > n_0}$ willekeurig dichtbij elkaar komen te liggen. In formule-vorm schrijven we dit als:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Een reëel getal is dus een equivalentieklasse van Cauchy-rijtjes.

¹²Als we op deze manier het limietbegrip geïntroduceerd hebben kunnen we ook $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ betekenis geven en schrijven $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, waarin $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

5. Complexe getallen, aangegeven met $\mathbb{C}$. Ontstaan door de z.g. imaginaire getallen toe te voegen.

Imaginaire getallen zijn bedacht om elke vergelijking $x^2 = a$ te kunnen oplossen voor een willekeurige $a \in \mathbb{R}$.¹³

De bovenstaande beschrijvingen suggereren definities te zijn, maar zijn het niet zolang we niet hebben laten zien dat de nieuwkomers kunnen bestaan. Merk op dat “kunnen bestaan” betekent dat het aannemen van het bestaan niet tot inconsistenties leidt.

2.11 ** Augustin Louis Cauchy, een onaangenaam mens **

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) werd geboren in Paris op 21 augustus 1789, 38 dagen na de val van de Bastille. Zijn vader was luitenant van politie en een vurig royalist. In verband met de politieke toestand verhuisde de familie al snel naar hun landhuisje in Arceuil (zo’n 6 kilometer van Parijs) omdat zijn vader het in Parijs levensgevaarlijk vond. Hier kreeg de jonge Cauchy een streng religieuze opvoeding van zijn moeder. Ze hadden het moeilijk in Arceuil, want zijn vader schrijft in een brief: *We hebben hier nooit meer dan een kwart brood - en soms zelfs dat niet. Soms kunnen we dat aanvullen met wat crackers en wat rijst dat we toebedeeld krijgen.*

Zodra ze konden gingen ze weer naar Parijs terug en Cauchy’s vader hield zich actief met zijn opvoeding bezig. Laplace en Lagrange (twee beroemde wiskundigen) kwamen bij de Cauchy-familie over de vloer, en vooral Lagrange schijnt ook belangstelling te hebben gehad voor de wiskundige opvoeding van de jonge Cauchy. Lagrange raadde zijn vader aan zijn zoon eerst een gedegen talenkennis te laten opdoen voordat hij serieus met de wiskundestudie zou beginnen. In 1802 ging Augustin-Louis naar de *École Centrale du Panthéon* waar hij twee jaar lang klassieke talen studeerde.

Vanaf 1804 volgde Cauchy lessen in wiskunde en in 1805 legde hij het toelatingsexamen af voor de *École Polytechnique* in die tijd de beste school ter wereld voor een aankomend wiskundige. Oorspronkelijk opgericht om militaire ingenieurs op te leiden voor Frankrijks Revolutionaire legers, had de school zich ontwikkeld tot een methodisch revolutionair instituut. Onderwijs was gekoppeld aan onderzoek en Frankrijks beste wiskundigen ontwikkelden zuivere wiskunde in discussies met hun studenten en ze lieten hun zien hoe wiskundige theorie en praktijk elkaar voeden en leiden tot nieuwe vindingen. Op de *École Polytechnique* volgde hij lessen bij Lacroix, de Prony en Hachette en hij kreeg les in de analyse van *Ampère*. In 1807 deed hij eindexamen en ging hij naar de beroemde ingenieursschool *École des Ponts et Chaussées*. Hij was een uitstekend leerling en voor zijn praktisch werk moest hij onder leiding van Pierre Girard werken aan het *Ourcq Canal* project, een van de projecten die Napoleon ondernam om Parijs te moderniseren.

In 1810 kreeg Cauchy zijn eerste baan. Daarvoor moest hij in Cherbourg aan de haveninstallaties werken die Napoleon nodig had voor zijn geplande invasie in Engeland. Op reis nam Cauchy een exemplaar mee van Laplace’s *Mécanique Céleste* en van Lagrange’s *Théorie des Fonctions*. Het was een drukke tijd voor Cauchy en naar huis schreef hij over zijn dagelijkse activiteiten: *Ik sta ’s ochtends om vier uur op en vanaf die tijd ben ik bezig ...ik word niet moe van het werken; in tegendeel, het geeft me kracht en ik ben in perfecte conditie ...*

Cauchy was een devoot katholiek en zijn houding ten opzicht van religie bezorgde hem problemen. In 1810 schrijft hij aan zijn moeder: *ze beweren dat mijn devotie er de oorzaak van is dat ik trots, arrogant en zelf-ingenomen word ...ik word nu niet meer lastig gevallen over religie en niemand heeft er het meer over...*

¹³Uit de “hoofdstelling van de algebra” volgt dan dat nu ook de oplossingen van alle polynoom-vergelijkingen $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$, allen tot de complexe getallen behoren.

Naast zijn werk deed Cauchy wiskundig onderzoek en in 1811 bewijst hij dat de hoeken van een convex veelvlak bepaald worden door de zijvlakken. Hij stuurde zijn eerste artikel over dit onderwerp ter publicatie in en, aangemoedigd door Legendre, volgde in 1812 een tweede artikel over veelhoeken en veelvlakken. Omdat hij ziek werd keerde hij in september 1812 naar Parijs terug. Het schijnt dat die ziekte niet fysiek maar waarschijnlijk psychisch was en ze leidde tot een ernstige depressie.

Terug in Parijs onderzocht Cauchy symmetrische functies en in november 1812 stuurde hij een rapport over dit onderwerp in. Dit rapport werd gepubliceerd in het tijdschrift van de *École Polytechnique* in 1815. In februari 1813, toen hij weer beter was, moest hij weer terug naar Cherbourg maar dat paste niet bij zijn wiskundeplannen. Zijn verzoek aan de Prony om een hulp-professoraat aan de *École des Ponts et Chaussées* werd afgewezen, maar hij kreeg toestemming om als ingenieur door te werken aan het Ourcq Canal project, in plaats van naar Cherbourg terug te gaan. Pierre Girard die het verzoek ondersteunde was blijkbaar tevreden over zijn eerdere werk bij het project.



Figuur 2.4: Augustin Cauchy

Cauchy ambieerde een academische carrière en hij solliciteerde voor een baan bij het *Bureau des Longitudes*. Niet hij kreeg de baan, maar Legendre. Hij kreeg ook geen baan bij de meetkundeafdeling van het *Institute*. Die baan ging naar Poinsot. Cauchy kreeg negen maanden onbetaald ziekenverlof. Toen zorgden politieke gebeurtenissen ervoor dat het werk aan het Ourcq Canal stilgelegd werd, zodat Cauchy de gelegenheid had zich een paar jaar geheel aan zijn onderzoek te wijden. Andere posten kwamen vrij, maar in 1814 ging er een naar *Ampère* en een plek bij het *Institute* op het gebied van de mechanica, die open kwam toen Napoleon Bonaparte aftrad, ging naar Molard. Bij deze laatste verkiezing kreeg Cauchy geen enkele van de 53 uitgebrachte stemmen. Zijn wiskundige productie bleef echter sterk en in 1814 publiceerde hij een rapport over bepaalde integralen dat later de basis werd voor zijn theorie van de complexe functies.

In 1815 verloor Cauchy het van Binet toen er een competitie was voor een positie op het gebied van de mechanica bij de *École Polytechnique*, maar hij kreeg een assistent-professoraat op het gebied van de analyse. In 1816 wint hij de *Grand Prix* van de Franse Academie van Wetenschappen met een werk over golven. Hij werd echter pas echt bekend toen hij een artikel naar het *Institute* stuurde waarin hij één van de vermoedens die Fermat aan Mersenne vertelde, over polygonale getallen bewees. Nu hielp de politiek Cauchy om in de Academie van Wetenschappen te komen en terwijl Carnot en Monge de politieke gunst verloren en werden weggestuurd nam Cauchy een van de twee plaatsen in.

Toen in 1817 Biot Parijs verliet voor een expeditie naar de Shetland eilanden, kreeg Cauchy zijn plek bij het *Collège de France*. Daar gaf hij les over de integratiemethoden die hij eerder had ontdekt maar nog niet gepubliceerd. Cauchy was de eerste die, naast zijn precieze definitie van een integraal, een heel precieze studie maakte van de convergentie-voorwaarden voor oneindige rijen. Zijn boek *Cours d'analyse* uit 1821 was bedoeld voor studenten aan de *École Polytechnique* en ging over het zo precies mogelijk opschrijven van de basis-stellingen van de differentiaal- en

integraal-rekening. Hij begon een studie over de residu-rekening in 1826 in het boek *Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal* en in 1829 definieerde hij in *Leçons sur le Calcul Différentiel* voor de eerste keer een complexe functie van een complexe variabele.

In 1818, toen in Frankrijk zijn naam als wiskundige gevestigd was trouwde hij Aloise de Bure. Ze kregen twee dochters

Cauchy had niet bepaald goede relaties met ander wetenschappers. Zijn onwrikbare katholieke gezichtspunten hadden hem betrokken bij een conflict van de Jesuïten met de Academie van Wetenschappen. Hij schuwde ook religie niet in zijn wetenschappelijk werk, bijvoorbeeld toen hij in 1824 een oordeel moest geven over een werk betreffende de theorie over het licht, waarbij hij de schrijver aanviel op zijn opvatting dat Newton niet had geloofd dat mensen een ziel hadden. Een journalist schreef toen: *het is zeker merkwaardig te zien hoe iemand van de Academie de respectabele taak van een missionaris op zich lijkt te nemen om voor de heidenen te preken.*

Een voorbeeld hoe Cauchy zijn collega's behandelde wordt gegeven door Poncelet, wiens werk over projectieve meetkunde, in 1820, door Cauchy bekritiseerd was. *...ik kreeg de kans mijn al te rigide beoordelaar bij zijn huis tegen te komen, net toen hij naar buiten kwam. ...Gedurende deze heel korte en snelle wandeling, merkte ik op dat ik als wetenschapper op geen enkele manier zijn achting of waardering had verworven ...zonder me nog iets te laten zeggen, liep hij abrupt weg, alleen zeggend dat in een volgende publicatie van zijn Leçons à l'École Polytechnique volgens hem 'de kwestie op een juiste wijze uitgezocht zou zijn'.*



Figuur 2.5: Augustin Cauchy

In deze periode behandelde hij ook het werk van Galois en Abel niet op correcte wijze. Abel, die het *Institute* in 1826 bezocht, schreef over hem: *Cauchy is gek en er niets wat voor hem gedaan kan worden, alhoewel, op dit ogenblik hij de enige is die weet hoe wiskunde beoefend moet worden.*

In [1] zegt Belhoste: *Toen op 6 april 1829 Abel zo ontijdig overleed, had Cauchy nog geen beoordeling gegeven van het artikel uit 1826, ondanks diverse protesten van Legendre. De beoordeling die hij uiteindelijk, op 29 juni 1829, gaf was haastwerk, kwaadaardig en oppervlakkig, zowel zijn eigen kwaliteiten als het werkelijk belang van de stukken die hij had beoordeeld onwaardig.*

Door de politieke gebeurtenissen in 1830 en omdat de jaren van hard werken hun tol hadden geëist besloot Cauchy een tijdje te stoppen. Hij vertrok na de juli-revolutie, in september 1830, uit Parijs en hij verbleef korte tijd in Zwitserland. Daar hielp hij enthousiast mee aan het oprichten van de Zwitserse Academie, maar het project viel in duigen omdat het door de politieke ontwikkelingen werd ingehaald.

De politieke gebeurtenissen in Frankrijk hielden in dat Cauchy nu een eed van trouw zou moeten zweren aan het nieuwe regime, en toen hij niet naar Parijs terugkeerde om dat te doen verloor hij daar al zijn posities. In 1831 ging Cauchy naar Turijn en na enge tijd nam hij het aanbod aan van de koning van Piedmont voor een leerstoel in de theoretische fysica. Vanaf 1832 gaf hij les in Turijn. Menabrea woonde deze lessen in Turijn bij en hij scheef dat die lessen *erg verward waren en plotseling van het ene idee naar het andere oversprongen, van de ene formule*

naar de andere, zonder poging er een verband in aan te brengen. Zijn presentaties waren duistere wolken, van tijd tot tijd verlicht door flitsen puur genie. ...van de dertig man die met mij aan de cursus begonnen was ik uiteindelijk de enige die tot het einde bleef.

In 1833 ging Cauchy van Turijn naar Praag om Karel X te volgen en om diens kleinzoon les te geven. Maar hij had daarbij niet veel succes, getuige de beschrijving die daarvan bestaat: *de overhoringen waren iedere zaterdag ... Wanneer hem door Cauchy een vraag gesteld werd over een probleem uit de beschrijvende meetkunde was de prins in verwarring en aarzelde ... Er was ook stof op het gebied van de natuurkunde en de scheikunde. Net als bij de wiskunde had de prins voor deze onderwerpen weinig belangstelling. Cauchy had er genoeg van en gilte en schreeuwde. Om hem te sussen zei de koningin soms tegen hem, 'te hard, meneer, niet zo hard'.*

Toen hij in Praag verbleef had hij op Bolzano's verzoek, in 1834, ook een ontmoeting met Bolzano. In [5] en [6] wordt beweerd dat Cauchy's definitie van continuïteit eigenlijk van Bolzano afkomstig is, maar Freudenthal's gezichtspunt [6] dat Cauchy zijn idee over continuïteit al ontwikkeld had vóór Bolzano lijkt overtuigender.



Figuur 2.6: Augustin Cauchy

Cauchy keerde in 1838 naar Parijs terug en hij kon zijn posities bij de Academie hervatten maar niet zijn leerstoelen omdat hij geweigerd had de eed van trouw te zweren. De Prony stierf in 1839 en zijn plaats bij het *Bureau des Longitudes* kwam vrij. Cauchy werd gesteund door Biot en Arago, maar Poisson was erg tegen hem. Cauchy werd gekozen maar, toen hij weigerde de eed te zweren, werd hij niet aangesteld en kon hij niet de bijeenkomsten bijwonen of een salaris ontvangen.

In 1843 overleed Lacroix en Cauchy werd kandidaat voor zijn leerstoel bij het *Collège de France*. Liouville en Libri waren ook kandidaten. Cauchy zou gemakkelijk zijn aangesteld op basis van zijn wiskundige verdiensten maar zijn politieke en religieuze activiteiten, zoals het ondersteunen van de Jesuïten werden belangrijke factoren. Libri werd uitgekozen, op wiskundig terrein duidelijk de zwakste van de drie, en Liouville schreef de volgende dag: dat hij *...diep vernederd was als man en als wiskundige door wat er gisteren bij het Collège de France gebeurde.*

In deze periode was Cauchy's wiskundige productie minder dan in de tijd vóór zijn zelfgekozen ballingschap. Hij deed belangrijk werk op het gebied van de differentiaalvergelijkingen en toepassingen daarvan op de mathematische fysica. Hij schreef ook artikelen over wiskundige astronomie, voornamelijk vanwege zijn ambities voor een plaats bij het *Bureau des Longitudes*.

Het vierdelige leerboek *Exercices d'analyse et de physique mathématique* dat tussen 1840 en 1847 verscheen, bleek echter bijzonder belangrijk.

Toen Louis Philippe in 1848 van het politieke toneel verdween kreeg Cauchy zijn universiteitsposities terug. Hij veranderde echter niet van ideeën en hij bleef zijn collega's problemen bezorgen. Libri die op politieke gronden benoemd was, zoals hierboven beschreven, vluchtte Frankrijk uit. Deels moet dit ook geweest zijn omdat hij ook op het punt stond vervolgd te worden voor het stelen van waardevolle boeken. In 1850 werden Liouville en Cauchy weer kandidaten voor de leerstoel, zoals ze ook in 1843 geweest waren. Na een stemming waarin de uitslagen niet veel verschilden, werd Liouville aangesteld. Daaropvolgende pogingen om deze beslissing te veranderen leidde tot erg slechte verhoudingen tussen Liouville en Cauchy.



Figuur 2.7: Augustin Cauchy

Een andere vrij onbenullige kwestie, deze keer met Duhamel, verduisterde de laatste jaren van Cauchy's leven. Het ging erover wie het eerste een resultaat gevonden had op het gebied van inelastische schokken. Duhamel was het niet eens met Cauchy's claim dat hij de eerste was geweest in 1832. Poncelet verwees naar zijn eigen werk op dit gebied, uit 1826 en zo werd aangetoond dat Cauchy ongelijk had. Cauchy was er echter de man niet naar toe te geven dat hij het fout had. Valson schrijft in [16]: *...het conflict legde een sfeer van droefenis en verbittering over de laatste dagen van zijn leven, wat alleen door zijn vrienden gemerkt werd*

In [16] wordt ook een brief van Cauchy's dochter geciteerd, waarin zijn dood wordt beschreven: *Helemaal bij zinnen, en tot 3h30 's ochtend geheel in het bezit van zijn geestelijke vermogens, uitte mijn vader de gezegende namen van Jesus, Maria en Josef. Voor de eerste keer leek hij zich bewust te zijn van de ernst van zijn toestand. Om ongeveer 4 uur ging zijn ziel naar God. Hij trad de dood met zo'n kalmte tegemoet dat wij ons schaamden dat we ons ongelukkig voelden.*

Veel wiskundige termen dragen Cauchy's naam: de Cauchy-integraal in de theorie van de complexe functies, de Cauchy-Kovalevskaya existentie-stelling voor de oplossing van partiële differentiaalvergelijkingen, de Cauchy-Riemann vergelijkingen en Cauchy-rijtjes. In totaal schreef hij 789 wiskunde-artikelen, een ongelooflijk aantal. Deze prestatie wordt in [1] als volgt samengevat: *...zo'n enorme wetenschappelijke creativiteit is duizelingwekkend, want het betreft onderzoek op het gebied van alle toen bekende gebieden van de wiskunde ...ondanks zijn uitgebreidheid en zijn vele facetten bezit Cauchy's wetenschappelijk werk een bepaald samenbindend thema, een geheime samenhang*

Cauchy's creatieve genius vond brede uitdrukking, niet alleen in zijn werk over de grondslagen van de reële en complexe analyse, gebieden waaraan zijn naam onuitwisbaar verbonden zal blijven, maar ook in vele andere gebieden.

Zijn verzameld werk, *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (1882-1970), werd gepubliceerd in 27 delen.

2.12 Verzamelingen met een structuur

Een perfect boek over de behandeling van groepen, ringen, lichamen en dergelijke, zoals die hieronder kort geïntroduceerd worden, is nog steeds Van de Waerden's 'Moderne Algebra' uit 1930. Later is het boek ook kortweg 'Algebra' genoemd en het is talloze keren vertaald en heruitgegeven. De oorspronkelijke duitstalige versie is –ook vanwege het perfecte taalgebruik– een plezier om te bestuderen.

2.12.1 Groepen

Definitie 2.12.1 (groep). Een *groep* is een niet-lege verzameling G waarbij een binaire operatie $\mathcal{R} : G \times G \rightarrow G$ bestaat, zodat:

- (i) De operatie *associatief* is, dwz $a\mathcal{R}(b\mathcal{R}c) = (a\mathcal{R}b)\mathcal{R}c$;
- (ii) De operatie *omkeerbaar* is, dwz $\forall a, b \in G \exists x \in G \ a\mathcal{R}x = b$ en $\forall a, b \in G \exists y \in G \ y\mathcal{R}a = b$.

Definitie 2.12.2 (commutatieve groep). Een groep G heet *commutatief* of *Abels*, als:

- (iii) De operatie $\mathcal{R}$ ook *commutatief* is, dwz $a\mathcal{R}b = b\mathcal{R}a$ voor elke $a, b \in G$.

Opmerking 2.12.3. We kunnen een element in een groep vaak goed associëren met een actie die door een tegengestelde actie ongedaan kan worden gemaakt. Voorbeelden zijn daarom (1) de permutatie van een rijtje getallen; (2) verschuivingen, bijv. in een plat vlak; (3) rotaties om een punt.

Maar ook de getalverzamelingen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ zijn natuurlijk een commutatieve groep met de optelling. Een commutatieve groep voor de vermenigvuldiging zijn bijv.: $\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dikwijls wordt de groeps-operator $\mathcal{R}$ als een vermenigvuldiging aangegeven (bijv. met $\cdot$) en als de operatie commutatief is gebruikt men daarvoor meestal de optelling (dus $+$ ipv $\mathcal{R}$).

Wanneer G uit eindig vele elementen bestaat, noemt men G een *eindige groep* en het aantal elementen noemt men de *orde* van G . We zullen zien, dat er eindige groepen van willekeurige eindige orde bestaan.

Op grond van de associativiteit geldt dat het product van een willekeurig eindig aantal groeps-elementen eenduidig bepaald is door de factoren en door hun volgorde.

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i .$$

In een Abelse groep is het product van een willekeurig eindig aantal groeps-elementen alleen door die factoren volledig bepaald (de volgorde is niet meer van belang).

Stelling 2.12.4. In elke groep G bestaat een eenduidig bepaald eenheids-element e met de eigenschap¹⁴

$$ea = ae = \forall_a \in G .$$

Stelling 2.12.5. In elke groep G bestaat voor elke $a \in G$ een eenduidig bepaald invers element a^{-1} met de eigenschap

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e .$$

Stelling 2.12.6. De oplossingen x en y van $ax = b$ en $ya = b$ zijn eenduidig bepaald.

¹⁴Dus: de linksinvers is ook een rechtsinvers.

Gevolg 2.12.7. Steeds geldt $(a^{-1})^{-1} = a$ en $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$; op grond van de eenduidigheid van de inverse kan nl a^{-1} slechts één inverse bezitten, terwijl we weten, dat $a^{-1} \cdot a = e$. Verder is $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$.

Gevolg 2.12.8. De oplossingen $x \in G$ en $y \in G$ van de vergelijkingen $ax = b$ en $ya = b$ laten zich in de volgende vorm schrijven: $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$, hetgeen door substitutie blijkt. Merk op dat bij een niet-commutatieve groep de notatie a/b niet gebruikt kan worden.

2.12.2 Ringen

Definitie 2.12.9 (ring). Een ring R is een verzameling van elementen, waarvoor een operatie optelling en een operatie vermenigvuldiging is gedefinieerd, zodat voldaan is aan de volgende eigenschappen: voor elk paar elementen $a, b \in R$ is de som $a + b$, evenals het product ab een eenduidig bepaald element van R , terwijl voldaan is aan:

EIGENSCHAPPEN DER OPTELLING (commutatieve groeps-operatie).

- (i) associatieve eigenschap: $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- (ii) commutatieve eigenschap: $a + b = b + a$;
- (iii) oplosbaarheid van de vergelijking $a + x = b$ voor alle a en b .

EIGENSCHAP DER VERMENIGVULDIGING.

- (iv) associatieve eigenschap: $a(bc) = (ab)c$.

DISTRIBUTIEVE EIGENSCHAPPEN.

- (v) $a(b + c) = ab + ac$;
- (vi) $(b + c)a = ba + ca$.

Definitie 2.12.10 (commutatieve ring). Geldt bovendien voor elk tweetal elementen a en b , dat

- (vii) $ab = ba$, dan heet de ring R een commutatieve ring.

Gevolg 2.12.11. Vanwege (i), (ii) en (iii) is R een Abelse groep voor de optelling. Daaruit volgt:

EIGENSCHAP 1. In R bestaat precies één nul-element 0 , zodat $a + 0 = a$ voor alle $a \in R$.

EIGENSCHAP 2. De vergelijking $a + x = 0$ heeft een eenduidige oplossing; deze oplossing noemen we het tegengestelde $-a$ van a .

EIGENSCHAP 3. De oplossing van de vergelijking $a + x = b$ (voor elke a en b uit R) bestaat en is eenduidig bepaald; men schrijft de oplossing:

$$x = (-a) + b = b - a$$

Opmerking 2.12.12. Omdat de optelling en de vermenigvuldiging aan de associatieve wet voldoen, kan men samengestelde sommen en producten definiëren en dan geldt dat de som van een willekeurig eindig aantal elementen bepaald is door de opgave van de termen:

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Het product van een willekeurig eindig aantal elementen is bepaald door de factoren en door hun volgorde:

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i.$$

Definitie 2.12.13 (ring met eenheids-element). Een ring R heeft een eenheids-element e , als er een element $e \in R$ is, zodat $ae = ea = a$ voor alle $a \in R$. Het element e is eenduidig; bestonden er twee eenheids-elementen e en e' , dan was $e = ee' = e'$. Meestal duiden we het eenheids-element van een ring aan met het symbool 1 .

Voorbeeld 2.12.14. De gehele getallen vormen een ring, evenals de restklassen modulo m , (dwz klokrekenen met m gehele uren).

2.12.3 Lichamen

Definitie 2.12.15 (lichaam). Een ring K heet een lichaam, als

- (i) K een van nul verschillend element bevat;
- (ii) in K de vergelijkingen $ax = b$ en $ya = b$ voor alle $a \neq 0$ steeds oplosbaar zijn.

Definitie 2.12.16 (commutatief lichaam). Geldt voor elk tweetal elementen a en b bovendien $ab = ba$, dan spreekt men van een commutatief lichaam en anders van een niet-commutatief lichaam.

Opmerking 2.12.17. De definitie van lichaam is gelijkwaardig met: een ring K is een lichaam, als de verzameling van de elementen $\neq 0$ in K een groep is met betrekking tot de vermenigvuldiging in K .

Gevolg 2.12.18. Daaruit volgt direct, dat in elk lichaam precies één eenheids-element e bestaat, waarvoor $ae = ea = a$ voor alle $a \in K$. Verder bezit elk element $a \neq 0$ in een lichaam precies één inverse a^{-1} , waarvoor $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$.

De oplossingen $x = a^{-1} \cdot b$ en $y = ba^{-1}$ van de vergelijkingen $ax = b$ en $ya = b$, zijn voorts eenduidig bepaald. Is K een commutatief lichaam, dan is $a^{-1}b = ba^{-1}$ en dan schrijft men daarvoor b/a en spreekt men van het quotiënt van b en a . In een commutatief lichaam K is dus elke vergelijking $ax = b$ ($a \neq 0$) oplosbaar.

Stelling 2.12.19. Een lichaam bezit geen nuldelers.

Bewijs: Uit $a \cdot b = 0$, $a \neq 0$ volgt $a^{-1} \cdot a \cdot b = 0$ of $b = 0$. □

Voorbeeld 2.12.20. 1. De belangrijkste lichamen zijn: het lichaam $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen, het lichaam $\mathbb{R}$ van de reële getallen en het lichaam $\mathbb{C}$ van de complexe getallen. Dit zijn de *getallenlichamen*.

Voorbeeld 2.12.21. 2. Bestaat een lichaam K uit 2 elementen, dan moet één element het element 0 zijn, het andere het element 1. Op grond van de optelling is K een additieve groep en dan kan alleen $1 + 1 = 0$ zijn. Verder is $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ en $1 \cdot 1 = 1$.

2.12.4 Morfismen

In het algemeen is een *homomorfisme* of *homomorfe afbeelding* een afbeelding tussen twee ruimtes die ook de structuur die op die ruimtes bestaat in elkaar kan overvoeren. Als $f : V \rightarrow W$ een homomorfisme is van V met structuur S in W met structuur T geldt

$$\forall_{x,y \in V} f(S(x,y)) = T(f(x), f(y)) .$$

Een homomorfisme heet een *isomorfisme* als het ook een bijectie is. Een homomorfisme van een ruimte in zichzelf heet een *endomorfisme*; een endomorfisme dat ook een bijectie is heet *automorfisme*.

2.13 Allereenvoudigste getaltheorie

Getaltheorie houdt zich bezig met eigenschappen van gehele getallen. In deze sectie zullen, ook als het niet uitdrukkelijk wordt gezegd, alle Latijnse letters natuurlijke getallen voorstellen.

a heet *deelbaar op* b ; b *deelbaar door* a , als $\exists_c ac = b$. Notatie: $a \mid b$.

b heet *ondeelbaar* als $\forall_a (a \mid b) \Rightarrow a = 1 \vee a = b$

p heet *priemgetal* als p ondeelbaar is en $p > 1$.

De kleinste priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

We vermelden zonder bewijs:

Eigenschap: Als p priem en $p \mid ab$, dan is $p \mid a$ of $p \mid b$.

Eigenschap: (Hoofdstelling der rekenkunde) Elk natuurlijk getal n is te schrijven als product van een (eindig) aantal priemfactoren (waaronder gelijke mogen voorkomen). Twee verschillende ontbindingen van n in priemfactoren verschillen slechts in de volgorde der factoren.

Grootste gemene deler

Laat a en b natuurlijke getallen zijn. Beschouw de verzameling¹⁵

$$V_{ab} = \{ax + by \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Bewering: De verzameling V_{ab} is precies de verzameling van veelvouden van een getal $g \in \mathbb{Z}$. Dit getal noemen we $g = \text{ggd}(a, b)$.

BEWIJS: Het kleinste positieve getal uit V noemen we g .

We laten eerst zien dat (i) ieder getal uit V_{ab} een veelvoud is van g , ofwel

$$c \in V_{ab} \Rightarrow g \mid c.$$

We kunnen namelijk schrijven $c = ax + by$, en ook $c = gq + r$ ($0 \leq r < g$), en ook g zelf kunnen we schrijven als $ax_0 + by_0$. Nu blijkt dat

$$r = c - gq = a(x - qx_0) + b(y - qy_0),$$

dus $r \in V_{ab}$. Als geldt $0 < r < g$, dan was g niet het kleinste positieve element van V_{ab} . Dus $r = 0$, en dus $c = gq$. (Dat was de eerste helft van het bewijs.)

Nu moeten we nog laten zien dat (ii) elk veelvoud van g in V_{ab} ligt, ofwel

$$kg = k(ax_0 + by_0) = a(kx_0) + b(ky_0) \in V_{ab}.$$

Dit bewijst de bewering.

Het is logisch om g de grootste gemene deler te noemen want (i) $g \mid a$ en $g \mid b$. Dat komt omdat ook a en b in V_{ab} liggen (kies $x = 1, y = 0$, resp. $x = 0, y = 1$). Verder (ii) is elke gemeenschappelijke deler van a , en b deelbaar door g :

$$d \mid a \wedge d \mid b \Rightarrow d \mid g,$$

eenvoudig¹⁶ omdat g de vorm $ax + by$ heeft. □

¹⁵De verzameling V_{ab} hangt dus af van de keuze van de twee gehele getallen a en b .

¹⁶Want enerzijds $\exists_{\alpha \in \mathbb{N}} a = \alpha d$, anderzijds $\exists_{\beta \in \mathbb{N}} b = \beta d$, zodat $g = ax_0 + by_0 = \alpha dx_0 + \beta dy_0 = d(\alpha x_0 + \beta y_0)$, dwz $d \mid g$.

Gemakkelijk zien we nu: Is p een priemgetal, en a niet deelbaar door p , dan is er een geheel getal x zo dat ax een p -voud $+1$ is. Want $\text{ggd}(a, p)$ is een deler van p , dus $\text{ggd}(a, p) = 1 \vee \text{ggd}(a, p) = p$, maar daar a niet door p deelbaar is en wel door $\text{ggd}(a, p)$, is $\text{ggd}(a, p) \neq p$, dus $\text{ggd}(a, p) = 1$. Dus 1 heeft de vorm $ax + py$.

Hiermee bewijst men de eerder genoemde stelling¹⁷: is $p \mid ab$ dan is $p \mid a$ of $p \mid b$.

Restklassen

Zij m een natuurlijk getal. We kunnen dan in $\mathbb{Z}$ een equivalentierelatie invoeren door de afspraak: $a \sim b \Leftrightarrow m \mid |a - b|$. Ga na dat dit een equivalentierelatie is. In plaats van $a \sim b$ schrijft men ook $a = b \pmod{m}$. (Spreektaal: a en b zijn congruent modulo m). Hier heet m de *modulus* van de congruentie. De equivalentieklassen heten *restklassen*, of precieser: restklassen modulo m . Het aantal bedraagt m .

Ga na, dat ¹⁸

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + c \equiv b + d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \end{array} \right.$$

Laat α en β restklassen mod m voorstellen. Laat a een getal uit α zijn, en b een getal uit β . Noem $a + b = c$, en geef de restklasse waartoe c behoort met γ aan. Ga na, dat γ niet afhangt van de speciale keuze van a uit α en van b uit β . De klasse γ heet de *som* van α en β : notatie $\gamma = \alpha + \beta$.

Evenzo wordt het product $\delta = \alpha\beta$ gedefiniëerd door de afspraak dat δ de klasse van ab is.

De genoemde bewerkingen voldoen aan de volgende regels (0 stelt de klasse voor waarin het getal 0 ligt, en 1 de klasse waarin het getal 1 ligt):

$$\begin{array}{ll} \forall_{\alpha, \beta, \gamma} & \alpha + \beta = \beta + \alpha; (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma); \alpha + 0 = \alpha. \\ \forall_{\alpha, \beta} \exists! \xi & \alpha + \xi = \beta. \\ \forall_{\alpha, \beta, \gamma} & \alpha\beta = \beta\alpha; (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma); 1 \cdot \alpha = \alpha; \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma. \end{array}$$

Deze eigenschappen worden uitgedrukt door te zeggen, dat de restklassen mod m een commutatieve ring vormen (zie ook sectie 2.12.2).

Is de modulus een priemgetal p , dan geldt bovendien:

$$\forall_{\alpha \neq 0, \beta} \exists! \xi \quad \alpha\xi = \beta.$$

Om dit te bewijzen laten we zien, dat, als p niet deelbaar is op a , er bij gegeven a en b een x is met $ax \equiv b \pmod{p}$, dus $p \mid ax - b$. Maw dat b de vorm $ax + py$ heeft. Voldoende hiertoe is, dat b deelbaar is door de G.G.D. van a en p . Deze G.G.D. is een deler van p , dus $= 1$ of $= p$. Daar de G.G.D. ook een deler van a is, is p zelf uitgesloten, dus de G.G.D. is 1. Daar b deelbaar is door 1, is nu de bewering bewezen.

De zojuist bewezen eigenschap zegt, tezamen met de ringeigenschappen, dat de restklassen mod p een commutatief lichaam vormen (zie ook sectie 2.12.3).

¹⁷Want als niet $p \mid a$, dan is er een x zodat ax een p -voud $+1$ is, dus $\text{ggd}(a, p)x$ een p -voud $+b$. Daar ab een p -voud is, blijkt dat b een p -voud is.

¹⁸Rekenen met restklassen is dus 'klokrekenen' met gehele getallen.

Stelling van Fermat

We bewijzen nog de volgende stelling van Fermat: Is p priem, dan is:

$$\forall_a \quad [a^p \equiv a \pmod{p}] .$$

BEWIJS: Voor $a \equiv 0 \pmod{p}$ is de bewering juist. Voor $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ geldt dat de restklassen:

$$\{a\}, \{2a\}, \{3a\}, \dots, \{(p-1)a\}$$

alle verschillend zijn, en alle verschillend van 0 ($\{x\}$ betekent hier: de restklasse waarin x voorkomt). Derhalve zijn het, in de een of andere volgorde, de restklasse $\{1\}, \{2\}, \dots, \{p-1\}$. Bijgevolg hebben de beide systemen hetzelfde product:

$$\{a\} \cdot \{2a\} \cdot \{3a\} \cdot \dots \cdot \{(p-1)a\} = \{1\} \cdot \{2\} \cdot \dots \cdot \{p-1\}$$

Daar $1, 2, \dots, p-1$ niet door p deelbaar zijn, mogen we deze factoren links en rechts weglaten, en er blijft over:

$$\{a\} \cdot \{a\} \cdot \dots \cdot \{a\} = 1 \quad \text{d.i.} \quad a^p \equiv 1 \pmod{p} .$$

□

2.14 Een zeer korte overzicht van de wiskunde

We willen hier een zeer globaal overzicht geven van de ontwikkeling der wiskunde. Gemakshalve maken we een ruwe indeling in enkele rubrieken. Nauwkeurige scheidingslijnen tussen de verschillende gebieden zijn echter niet te trekken. Je moet vooral niet de indruk krijgen dat de verschillende takken van de wiskunde zich onafhankelijk van elkaar, of onafhankelijk van de natuurwetenschappen, hebben ontwikkeld.

Algebra.

Hoewel reeds in de oudheid de Indiërs, Babyloniërs en Egyptenaren goede rekenmeesters waren, is datgene wat we tegenwoordig algebra noemen daar niet tot hoge ontwikkeling gekomen. Het bleef ongeveer beperkt tot het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad en van een enkele toevallig eenvoudig oplosbare van hogere graad. Pas de Arabieren, die de kennis der oudheid (hoofdzakelijk via Spanje) omstreeks het einde der middeleeuwen naar de West-Europese beschaving overbrachten, hebben het verder gebracht, dankzij hun techniek van het letterrekenen. Pas bij Descartes (1596–1650) vinden wij het letterrekenen grotendeels in zijn huidige vorm. De complexe getallen bleven van Leibniz (1646–1716) tot Gauss (1777–1855) in een waas van geheimzinnigheid gehuld; hetzelfde geldt trouwens in iets mindere mate voor de negatieve getallen. Overigens was tot ca. 1800 de algebra niet veel meer dan wat thans op de middelbare school wordt onderwezen.

Gauss was de eerste die vertrouwen in de complexe getallen had, en er door het maken van een meetkundig beeld (het complexe vlak) een hechtere grondslag aan gaf. Hij gaf het eerste bewijs van de stelling dat elke veelterm $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ als product van lineaire factoren is te schrijven. (Dat is de *hoofdstelling van de algebra*.) Tot in het begin van de 19de eeuw was het hoofdprobleem der algebra het oplossen van vergelijkingen van hogere graad door middel van worteltrekkingen (voor de graden 2, 3, 4 was dat reeds bekend in de tijd van Descartes). Pas in 1826, werd door Abel (1802–1829) bewezen, dat dat in het algemeen onmogelijk was.

Omstreeks in dezelfde tijd valt het werk van Galois(1811–1832), die door het invoeren van het begrip permutatie-groep de theorie der algebraïsche vergelijkingen, volledig opklaarde.

In de 19de eeuw beleefde de algebra een ontzagwekkende ontwikkeling, opgestuwd door de getaltheorie, de functietheorie, meetkunde en de verzamelingstheorie (Cantor 1845–1918). Een uiterst belangrijk onderdeel van de wiskunde werd de *lineaire algebra*: het rekenen met vectoren en matrices. Omstreeks 1900 brak de abstracte algebra door (de studie van lichamen, ringen, idealen, etc., los van het klassieke getalbegrip), sterk onder invloed van Hilbert (1862–1943).

Analyse.

Hieronder verstaat men tegenwoordig alles wat op de differentiaal en integraalrekening steunt, of iets algemener: alles wat op het limietbegrip berust. De differentiaal- en integraalrekening werd ongeveer gelijktijdig door Leibniz (1646–1716) en Newton (1642–1727) ontwikkeld, min of meer onafhankelijk van elkaar.

Reeds met Newton zette de grootscheepse toepassing van de analyse op de natuurwetenschappen in. Newton zelf beschreef de mechanica van het zonnestelsel ermee. In het bijzonder moet Euler (1707-1783) genoemd worden, die op de meest uiteenlopende gebieden baanbrekend werk verrichtte.

Hoofdzakelijk bij Cauchy (1789–1857) komt de theorie der complexe functies van een complexe veranderlijke (de z.g. functietheorie) tot een hechte fundering. Later gaf Riemann (1826-1866) op de functietheorie een geheel nieuwe visie die leidde tot een fraaie afgesloten theorie van de algebraïsche functies.

Cauchy heeft de strengheid ingevoerd in de analyse. Vóór Cauchy werkte men slordig, vaak zonder behoorlijke definities, en min of meer intuïtief. Dit gaf herhaaldelijk tot ernstige fouten aanleiding. Zelfs Euler schreef, dat de oneindige reeks $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ de som $\frac{1}{2}$ had, zonder dat hij een definitie voor de som van een oneindige reeks had gegeven. (Inderdaad kan men met verschillende argumenten betogen, dat het wel eerlijk zou zijn als de som $\frac{1}{2}$ was, maar ook 0 is wel eerlijk.)

Vóór Cauchy ging men uit van de gedachte dat allerlei begrippen (zoals getal, limiet, integraal, oneindig) bestonden zonder dat men ze gedefiniëerd had. Men dacht, dat men ze slechts behoefde te analyseren; dat men uit de eigenschappen (die men enigszins experimenteel vaststelde) tot de ware inhoud van het begrip zou moeten komen. De voornaamste oorzaak voor deze vreemde houding is waarschijnlijk de geweldige toepasbaarheid van de analyse in de natuurwetenschappen en in de meetkunde, waardoor men een soort richtsnoer voor de waarheid kreeg. Natuurlijk houden we nog restanten van deze intuïtieve acceptatie over, maar deze hebben betrekking op meer fundamentele zaken, zoals het verzamelings-begrip en de logica.

Een nieuwe denkrichting werd in de analyse gebracht door Hilbert (1862-1943). Deze voerde een nuttige meetkundige terminologie in: In een zekere klasse van functies noemt hij elke functie een punt; de gehele klasse heet een ruimte. Er ontstaan dan sterke analogieën met gewone vectorruimten en de theorie der lineaire integraalvergelijkingen verschijnt als een voortzetting, van de gewone lineaire algebra. Het wiskunde-vak waarin functies op deze manier bestudeerd worden het *functionaalanalyse*.

Getaltheorie.

Hieronder verstaat men de leer der gehele getallen. De eenvoudigste begripsvormingen waren omstreeks 300 v.C. al bij Euclides aanwezig. Deze bewijst bijv., dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. De theorie der onbepaalde vergelijkingen (dat zijn vergelijkingen waarvan zowel de coëfficiënten als de onbekenden gehele getallen zijn) wordt aan Diophantus (ca. 250 n.C.) toegeschreven, maar schijnt in feite pas later door Arabische mathematici te zijn bewerkt.

Daarna gebeurde er tot Fermat (1601-1665) weinig waardevols. Fermat en Euler (1707-1783) voerden de congruenties in. Van Fermat tot en met Gauss (1777-1855) hield de getaltheorie zich hoofdzakelijk bezig met de vele problemen voortvloeiende uit de kwadratische vergelijking $x^2 + ax + b = 0 \pmod{m}$. De 19de eeuw bracht een uitbreiding van het gebied der gehele getallen tot dat der gehele algebraïsche getallen (dat zijn wortels van vergelijkingen $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ met gehele coëfficiënten): Dirichlet (1805-1859), Kummer (1810-1893), Dedekind (1831-1916).

Reeds door Euler werd de analyse toegepast op de getaltheorie, zij het op nogal formele wijze. Sinds Dirichlet en vooral sinds Riemann (1826-1866) kan men pas van analytische getaltheorie spreken. De belangrijkste vrucht daarvan werd in 1896 geplukt (Hadamard en De la Vallée Poussin): het bewijs van de reeds in 1797 door Legendre vermoede stelling dat $x^{-1}\pi(x) \log x \rightarrow 1$ (als $x \rightarrow \infty$), waarin $\pi(x)$ het aantal priemgetallen $\leq x$ is, en $\log x$ de z.g. natuurlijke logaritme van x voorstelt.

De getaltheorie is eeuwenlang een bron van inspiratie geweest. Thans schijnt –behalve in de cryptografie– deze rol van de getaltheorie ongeveer te zijn uitgeteld.

Meetkunde.

Wat tot ongeveer 1970 in het secundaire onderwijs als meetkunde werd onderwezen is ongeveer de inhoud van de eerste boeken van de “Elementen” van Euclides. Bij de Grieken, en in het bijzonder bij Euclides, vinden we het eerst een opzet in de vorm van axioma’s, definities, stellingen en bewijzen. Wat axioma’s en definities betreft, was het werk van Euclides in onze ogen nog maar gebrekkig. We moeten echter bedenken, dat pas Hilbert een goed axiomasysteem voor de Euclidische meetkunde gaf, en dat eigenlijk pas omstreeks 1900 de axiomatische methode van Euclides in andere delen van de wiskunde begon door te werken.

Meer dan 2000 jaar zijn de gedachten geconcentreerd geweest op het parallelenaxioma van Euclides. Dit had een heel ander karakter dan de andere, meer triviale, axiomata. Men stelde zich tot doel de waarheid daarvan te bewijzen. In de eerste helft van de 19de eeuw lukte het echter aan te tonen, dat het parallelenaxioma onbewijsbaar was, doordat men systemen construeerde (niet-euclidische meetkunde) waarin aan alle axioma’s van Euclides voldaan was behalve aan het parallelenaxioma. Het had dus geen zin meer om te vragen of het parallelenaxioma waar of onwaar was.

Sindsdien is men ook anders gaan denken over axioma’s. De vraag naar de “waarheid” van een axioma wordt niet meer gesteld. Een axiomasysteem legt een tak van wiskunde vast, en daarin wordt elke uit de axioma’s afleidbare bewering een ware bewering genoemd. De axioma’s zijn dus per definitie waar. Wel interesseert men zich voor de volgende vragen. (1.) Zijn de axioma’s van een systeem A onderling afhankelijk (d.w.z. kan één ervan uit de andere worden afgeleid)? (2.) Zijn ze in strijd met elkaar? (3.) Is er, onder aanname van één axiomasysteem B iets te construeren dat aan de axioma’s A voldoet?

Om terug te komen tot de meetkunde: tot aan Descartes (1596-1650) bleven de “Elementen” van Euclides de hoogst denkbare wijsheid. Descartes vond de *analytische meetkunde* uit. Om in de taal van onze dagen te spreken: hij construeerde een isomorfie¹⁹ tussen het Euclidische vlak en het Cartesische product $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (waarin $\mathbb{R}$ de verzameling der reële getallen is). Door het invoeren van coördinaten werd het mogelijk meetkundige problemen algebraïsch te formuleren, algebraïsch op te lossen en tenslotte de oplossing weer meetkundig te interpreteren. Daardoor was

¹⁹Een isomorfie is een afbeelding van een verzameling met een structuur naar een andere verzameling met een (andere) structuur, maar de andere structuur heeft op de elementen van zijn verzameling een effect dat precies overeenkomt met het effect van de eerste structuur op de elementen van de eerste verzameling. De verzamelingen (met hun structuur) lijken verschillend, maar doen precies hetzelfde.

men eindelijk verlost van de grilligheid der meetkundige methoden, die veel minder systematisch zijn dan de algebraïsche.

De analytische meetkunde kwam (ook in meer dimensies) in een korte tijd tot snelle ontwikkeling, en behalve de algebra kon ook direct de analyse op de meetkunde worden toegepast (differentiaalmeetkunde en mechanica).

De klassieke differentiaalmeetkunde kwam tot een zekere afsluiting bij Gauss. De moderne begint bij Riemann. Vóór Riemann was differentiaalmeetkunde de studie van krommen en oppervlakken gelegen in een Euclidische ruimte. Riemann wist zich van die Euclidische ruimte los te maken. Deze Riemannse differentiaalmeetkunde werd later de basis voor de relativiteitstheorie van Einstein (1879-1955).

Een meetkundige ontwikkeling in een geheel andere richting is die der *projectieve meetkunde*, die zich bezighoudt met die meetkundige eigenschappen die door centrale projectie niet worden verstoord. Het fundament werd gelegd door Desargues (1593-1661), doch de bloeitijd van de projectieve meetkunde ligt omstreeks 1850.

Een belangrijke moderne tak van meetkunde is de topologie. De topologie is begonnen als “gummi-meetkunde”: de leer der meetkundige eigenschappen die niet veranderen bij continue vervorming. Bijv. de stelling van Jordan, die zegt, dat een gesloten kromme (zonder dubbelpunten) het platte vlak in twee gebieden verdeelt. Grotere waardering voor de topologie ontstond nadat Riemann en Klein (1849-1925) algebraïsche functies interpreteerden als functies op een gesloten oppervlak, waarbij het alleen om de topologie van het oppervlak ging. Later is de topologie overgegaan tot de studie van het continuïteitsbegrip in algemenere ruimten.

Toegepaste wiskunde.

Er is geen duidelijke scheidingslijn tussen zuivere en toegepaste wiskunde. Onder toegepaste wiskunde verstaat men meestal datgene wat onmiddellijk met de toepassingen samenhangt. Het is duidelijk dat het begrip *toegepaste wiskunde* voortdurend verandert. Men kan bijv. bijna de gehele meetkunde der oudheid tot de toepassingen rekenen (geodesie, astronomie), slechts de structuur “axioma – definitie – stelling – bewijs” staat buiten de directe toepassing. De zuivere wiskunde ontstaat daar waar men zich voor de wiskunde als zodanig gaat interesseren, ongeacht de toepassingsmogelijkheid. Dat wat als ‘zuiver’ ontstaat, kan later heel goed worden toegepast. Als voorbeelden noemen we de Riemannse meetkunde, die later in de relativiteitstheorie gebruikt werd, en verder de groepsrepresentaties, die later in de quantummechanica werden toegepast. Functionaalanalyse is een onmisbaar onderdeel van de *numerieke wiskunde* (het computer-rekenen) geworden. Aan de andere kant zijn grote delen van de “zuivere” wiskunde opgebouwd naar aanleiding van de behoeften van de natuurwetenschappen en de techniek.

De wiskunde aan het einde van de 20ste eeuw.

De huidige wiskunde voldoet aan hoge eisen van strengheid en heeft in de 20ste eeuw de neiging vertoond tot steeds groter algemeenheid. Het streven is, alle bestaande resultaten te vervangen door analoge resultaten met een zeer veel wijdere strekking, teneinde met één theorie de meest uiteenlopende onderdelen te kunnen bestrijken. Deze veelal zeer vruchtbare abstractie wordt bijv. bereikt door de bestaande stellingen en bewijzen nauwkeurig na te gaan om te zien of er niet iets van de gegevens kan worden gemist.

Beroemd en berucht om dit streven is een groep Franse mathematici die onder de schuilnaam N. Bourbaki een soort encyclopedie der moderne wiskunde uitgaf (1935–1998).

Waarom die strengheid?

De eis naar strengheid wordt opgelegd door het verlangen om correcte conclusies af te leiden. Wiskundige beweringen dienen correct uit axioma's en definities afgeleid te zijn. Een huis met een foutje kan nog heel goed bewoonbaar zijn, maar een bewijs met een foutje is helemaal geen bewijs. De beginnening verwondert zich er altijd over, dat in de beginselen van de analyse zoveel moeilijke bewijzen voorkomen van zaken die wel bijna vanzelf schijnen te spreken. Dat komt doordat het begrip reëel getal enerzijds zo gecompliceerd is, en anderzijds zoveel voorstellingen uit onze aanschouwingswereld oproept waarmee we al lang vertrouwd zijn. Je moet bedenken dat aan “bijna vanzelf spreken” geen enkele bewijskracht toekomt: een bijna-bewijs is helemaal geen bewijs.

Je kunt je troosten met de gedachte, dat het vóór 'Cauchy nog veel moeilijker was om de analyse te leren. De spelregels waren toen in elk geval minder duidelijk.

De stelling van Gödel

Ondanks de verwoede pogingen van 20ste-eeuwse wiskundigen om prachtige consistente bouwwerken van wiskunde op te stellen –waarbij Hilbert en Bourbaki tot de kampioenen gerekend moeten worden– is het goed te bedenken dat dit streven nooit tot een definitieve afsluiting zal komen.

Zeer tot teleurstelling van Hilbert, kon Gödel (1906-1978) in 1930 bewijzen: *Elke consistente formele wiskunde moet noodzakelijkerwijs onbewijsbare beweringen bevatten*. Het is dus onmogelijk om een volledige en consistente theorie voor de gehele wiskunde op te stellen.

Hoewel Bourbaki van dit resultaat op de hoogte was, heeft hij zich er nooit iets van aange-trokken.

