Hoofdstuk 1

Euclidische meetkunde

Meetkunde is een van de oudste stukken van de wiskunde. Alleen rekenen is nog ouder. Meer dan 2000 jaar geleden waren er al meetkunde-boeken. Een van de oudste is héél bekend. Het is het boek 'Elementen' dat werd geschreven door Euclides, in het Grieks. Euclides leefde in Alexandrië, in Egypte vlak bij de Middellandse zee, ongeveer 300 jaar vóór het begin van onze jaartelling. Heel lang, tot ongeveer 1970 was de meetkunde die op de middelbare school geleerd werd, bijna hetzelfde als die je in de 'Elementen' van Euclides vindt. Daarna hebben onderwijsdeskundigen de schoolwiskunde veranderd. Dat was jammer, want Euclides schreef zijn boeken zodat je heel duidelijk kon zien hoe de wiskunde bedoeld is en hoe de wiskunde in elkaar zit. Nu zijn de wiskunde-schoolboeken meer een soort puzzle-boeken en lijkt de wiskunde alleen maar op een verzameling trucjes.

Euclides liet zien dat de echte wiskunde vaste spelregels heeft (net zoals bij een spelletje). Er zijn drie regels waaraan je je houden moet: (1) als je woorden gebruikt moet je eerst afspreken wat je er precies mee bedoelt; (2) dan maak je nog een paar afspraken (spelregels) waarover je het met elkaar eens bent; en daarna (3) gebruik je alleen maar je logische verstand om te zien wat het gevolg is van de afspraken die je gemaakt hebt.

Een afspraak wat je met een woord precies bedoelt noem je in de wiskunde een *definitie* of een *bepaling*[1]. De spelregels waarover je geen ruzie meer maakt noem je in de wiskunde *axioma's*.

Eén van de leuke dingen van de wiskunde is dat je daarmee goed je logische verstand kunt oefenen en dat je kunt zien hoeveel je wel niet te weten kunt komen door alleen maar je verstand te gebruiken.

Wanneer je naar andere vakken kijkt, zoals biologie of natuurkunde of aardrijkskunde, dan zie je dat wiskunde veel verschilt van die andere vakken. Die ander vakken kijken hoe de wereld in elkaar zit en daar leer je dan van alles van. De echte wiskunde kijkt alleen maar naar zijn eigen afspraken en spelregels en maakt daar -stapje voor stapje- een heel bouwwerk van. Alle wiskunde is dus door mensen bedacht, en je kunt het zelf ook bedenken.

Biologie en natuurkunde zoeken wat de regels zijn van de natuur om ons heen, maar wiskunde is een bedenksel dat begint met het uitkiezen van woorden en een paar (spel)regels. En daarna zoek je alleen maar uit wat daar dan logisch het gevolg van is[2].

[1] Om uit te leggen wat je bedoeld heb je natuurlijk woorden nodig. Je moet dus eerst genoeg *taal* kennen.

[2] Biologie, natuurkunde, enz., heten *inductieve* wetenschappen, omdat je er de kennis aan de werkelijkheid ontleent (uit het bijzondere het algemene afleidt). Wiskunde heet een *deductieve* wetenschap, omdat je de kennis zelf opbouwt (uit het algemene het bijzondere afleidt: de kennis volgt uit de axioma's).

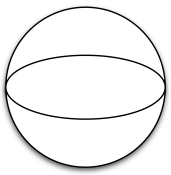
1.1 Inleiding

1.1.1 Begin

De meetkunde is de wiskunde die zich bezighoudt met vormen, zoals *punten*, *rechte lijnen*, *kromme lijnen*, *cirkels*, *vlakken*, *kubussen*, enz.. We gaan dat nu op een echte wiskundige manier aanpakken en we beginnen met *bepalingen* (ook wel *definities* genoemd) om af te spreken wat we met bepaalde woorden precies bedoelen.

Bepaling 1.1.1. Een *lichaam* is een begrensd deel van de ruimte.

Voorbeeld 1.1.2. Een bol. Een cylinder.



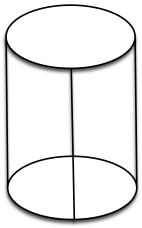
Een bol

Bepaling 1.1.3. Een *oppervlak* of een *vlak* is de begrenzing van een lichaam.

Voorbeeld 1.1.4. Het bovenvlak, ondervlak of het zijvlak van een cylinder.

Bepaling 1.1.5. Een *lijn* is de grens van een oppervlak.

Voorbeeld 1.1.6. De grens van het bovenvlak van een cylinder is een cirkel.



Een cylinder

Bepaling 1.1.7. Een *punt* is de grens van een lijn(stuk).
Een lijn is gedacht samengesteld te zijn uit punten.

Bepaling 1.1.8. Een *figuur* is een samenstel van lichamen, vlakken, lijnen en punten. Deze behoeven niet allemaal voor te komen.

De eenvoudigste soort lijn die we kennen is de *rechte lijn*. Denk aan: een gespannen draad, een zonnestraal of de rand van een lineaal. Tussen twee punten volgt de rechte lijn de kortste weg.

We moeten bij het opbouwen van de meetkunde uitgaan van een paar waarheden die we niet behoeven te bewijzen, maar die iedereen als waarheid kan aannemen. Zo'n waarheid noemen we een *axioma*.

Axioma 1.1. Door twee punten gaat één en slechts één rechte lijn.

In de wiskunde zeg je meestal *"één en slechts één"* als je *"precies één"* bedoelt.

Axioma 1: rechte lijn

Voor het gemak bedoelen we in het vervolg met *lijn* altijd een *rechte lijn*. Als een lijn niet recht is spreken van een *kromme* of *gebogen lijn*. We denken een rechte lijn altijd aan beide kanten oneindig ver doorlopend.

Bepaling 1.1.9. Een punt verdeelt een lijn in twee *halve lijnen*.

Bepaling 1.1.10. Een *lijnstuk* is een stuk van een lijn, begrensd door twee van zijn punten.

Een lijnstuk kunnen we naar twee zijden verlengen. Vanwege Axioma 1.1 gaat dat verlengen slechts op één manier.

Bepaling 1.1.11. Een *plat vlak* is een zodanig oppervlak dat elke rechte lijn die er twee punten mee gemeenschappelijk heeft, er geheel in ligt.

Een plat vlak is altijd tot in het oneindige uitgebreid te denken.

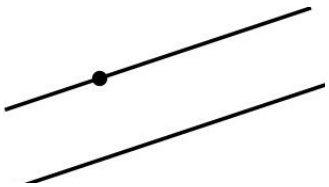
Uit axioma 1.1 volgt dat door 3 punten die niet op dezelfde lijn liggen er één en slechts één plat vlak gaat. (Kun je zien dat dat waar is?)

De *vlakke meetkunde* houdt zich bezig met figuren in het platte vlak. Een ander woord voor vlakke meetkunde is *planimetrie*. De meetkunde die zich bezig houdt met ruimte-figuren heet *stereometrie*.

Twee lijnen die niet in een plat vlak liggen heten *kruisende lijnen*. Als twee rechten wel in één plat vlak liggen, dan zijn er twee mogelijkheden:
1. ze snijden elkaar;
2. ze snijden elkaar niet: ze heten dan *evenwijdige lijnen*.

Als twee lijnstukken: AB en CD op twee evenwijdige lijnen liggen dan noteren we dit als $AB /\!/ CD$.

Axioma 1.2. Door een punt P buiten een lijn ℓ gaat één en slechts één rechte lijn evenwijdig aan aan ℓ.



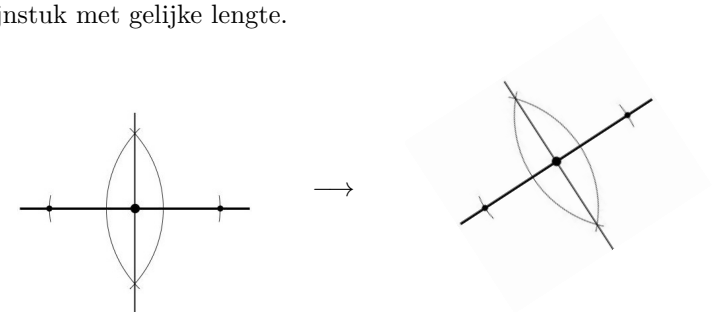
Axioma 2: evenwijdige lijn

Bepaling 1.1.12. We zeggen: evenwijdige lijnen hebben dezelfde *richting*.

1.1.2 Verplaatsingen en hoeken

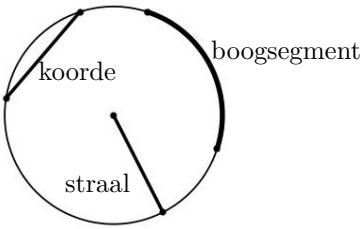
We kunnen figuren in een plat vlak verplaatsen. Denk maar dat je het hele vlak verplaatst, de figuren gaan dan mee. We hebben hierbij het volgende axioma.

Axioma 1.3. Bij verplaatsing gaat een punt over in een punt, een lijn over in een lijn, een lijnstuk in een lijnstuk met gelijke lengte.

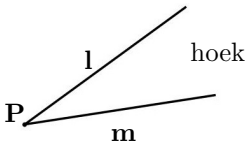


Axioma 3: verplaatsing

Kies nu een lijnstukje als *lengte-eenheid* (bijvoorbeeld een centimeter). Met behulp van verplaatsingen kunnen we dan elk lijnstuk een *lengte* geven. ("Een cm past tien maal in een dm" krijgen we door die centimeter 10 keer te verplaatsen.) We geven de lengte van een lijnstuk AB aan met $\overline{AB}$. Als twee verschillende lijnstukken AB en CD even lang zijn schrijven we $\overline{AB} = \overline{CD}$.

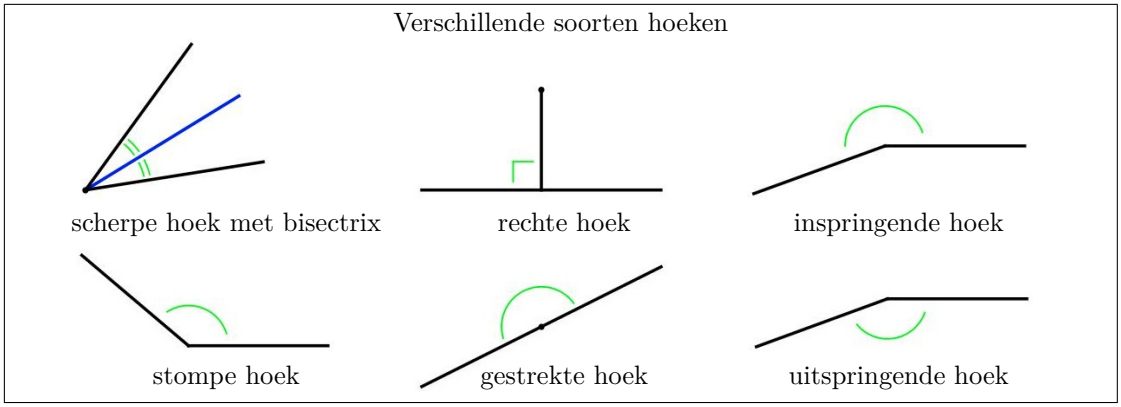


Bepaling 1.1.13. Een *cirkel* is een vlakke, kromme lijn, waarvan alle punten een vaste afstand hebben tot een vast punt in het vlak van de kromme lijn.
Bij een cirkel spreken we van het *middelpunt*, *cirkelboog*, *koorde*, een punt *op de cirkel*, een punt *binnen de cirkel*, een punt *buiten de cirkel*,



Bepaling 1.1.14. Twee halve lijnen l en m met een gemeenschappelijk beginpunt P vormen een *hoek*. P heet het *hoekpunt*, en l en m heten de *benen* van de hoek.
Ligt op l een punt L en op m een punt M dan geven we deze hoek wel aan met $\angle LPM$ of (wat hetzelfde betekent) met $\angle MPL$.
Uit axioma 1.3 volgt dat een hoek door verplaatsing overgaat in een hoek.

Bepaling 1.1.15. Twee hoeken die door een verplaatsing in elkaar overgevoerd kunnen worden heten *gelijk*.



Bepaling 1.1.16. Een *gestrekte hoek* is een hoek waarvan de benen in elkaars verlengde liggen. Een *bisectrix* (ook wel *deellijn* genoemd) is een halve lijn die een hoek in twee gelijke delen verdeelt. Een *rechte hoek* is de helft van een gestrekte hoek.

Evenals bij lijnstukken kunnen we, als we een *hoek-eenheid* gekozen hebben, ook hoeken meten. We kunnen dan ook hoeken optellen en aftrekken.
We noemen het $\frac{1}{180}$ gedeelte van een gestrekte hoek, een *graad* (1^o). We verdelen een graad in 60 minuten ($1^o = 60^{'}$) en een minuut in 60 seconden ($1^{'} = 60^{''}$).
Een *scherpe hoek* is een hoek tussen 0^o en 90^o. Een *stompe hoek* is een hoek tussen 90^o en 180^o. Een *inspringende hoek* is een hoek tussen 180^o en 360^o. Een *uitspringende hoek* is een hoek tussen 0^o en 180^o.

Bij een hoek $\angle MPL$ in een vlak bedoelen we de uitspringende hoek (als we er niet bij zeggen dat we het anders bedoelen).

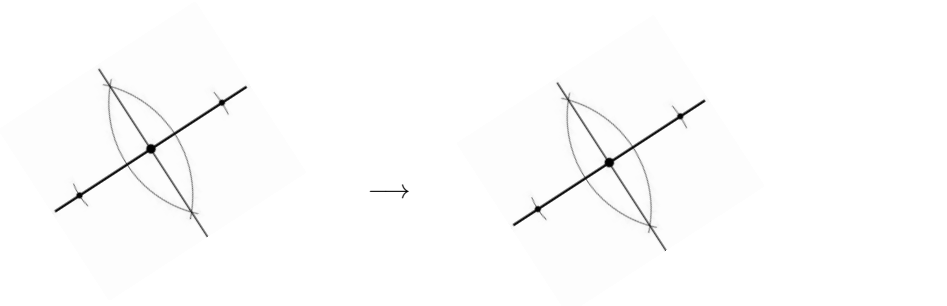
Bepaling 1.1.17. We zeggen dat twee lijnen die een rechte hoek vormen *loodrecht* op elkaar staan. Een *loodlijn* is een lijn die loodrecht staat op een andere lijn. Twee hoeken die elkaar aanvullen tot een rechte hoek heten elkaars *complement*. Twee hoeken die elkaar aanvullen tot een gestrekte hoek heten elkaars *supplement* of elkaars *nevenhoek*.

Bepaling 1.1.18. Een *middelloodlijn* van een lijnstuk AB deelt het lijnstuk AB in twee gelijke delen en staat er loodrecht op.

1.1.3 Bijzondere verplaatsingen

Bepaling 1.1.19. Een *verschuiving* van een figuur is een verplaatsing waarbij elk punt van de figuur *in dezelfde richting* en *over dezelfde afstand* verplaatst wordt. Een verschuiving is dus bepaald door een afstand en een richting. Deze 'afstand met richting' noemen we de *verschuivings-vector*.
Als P verschoven wordt naar Q, geven we de verschuivings-vector aan met $\overrightarrow{PQ}$.

Axioma 1.4. Bij verschuiving gaat een lijn over in een verschoven lijn die evenwijdig is met de eerste lijn.



Axioma 4: verschuiving

Bepaling 1.1.20. Een *draaing* (ook wel *rotatie*) van een figuur om een punt P is een verplaatsing waarbij het punt P niet verplaatst wordt.

Bepaling 1.1.21. Een *spiegeling* van een figuur om een lijn l is een verplaatsing waarbij de lijnt l niet verplaatst wordt, en alle elementen van de figuur van de ene kant van de lijn naar de andere kant verplaatst worden.

Het blijkt dat we ieder verplaatsing kunnen samenstellen uit verschuivingen, rotaties en spiegelingen.

Bepaling 1.1.22. Twee figuren die door verplaatsing in elkaar overgevoerd kunnen worden heten *congruent*. Als twee figuren F en G congruent zijn, schrijven we ook wel $F \cong G$.

Bepaling 1.1.23. Een figuur die door verplaatsing in zichzelf overgevoerd kan worden heet *symmetrisch*.

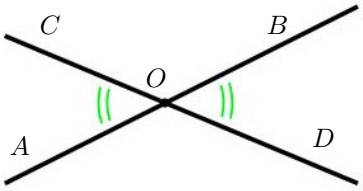
1.2 Eerste bewijzen, hoekstellingen

Wiskundige beweringen die aardig zijn om te weten, worden *stellingen* genoemd. Om te weten dat die beweringen echt waar zijn (geen onzin of iets waarvan je alleen maar denkt dat het waar

is) moet je altijd eerst controleren of ze echt waar zijn. Als wiskundigen zo'n waarheid nagaan, zeggen ze dat ze de stelling *bewijzen*.

Om wiskunde te bedenken moet je eerst goede stellingen verzinnen en ze daarna bewijzen. Dat is precies wat we nu gaan doen in de meetkunde.

Stelling 1.2.1. Overstaande hoeken zijn gelijk.

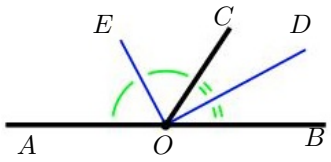


GEGEVEN: Lijn CD snijdt lijn AB in O.
TE BEWIJZEN: $\angle COA = \angle DOB$.
BEWIJS: $\angle COA = 180^0 - \angle COB = \angle DOB$.
QED □

Je ziet hoe eenvoudig een bewijs kan zijn! QED[3]

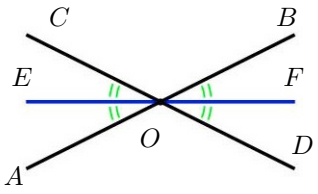
Stelling 1.2.2. De bisectrices van twee nevenhoeken staan loodrecht op elkaar.

GEGEVEN: $\angle AOB = 180^o$; $\angle AOE = \angle EOC$; $\angle COD = \angle DOB$.
TE BEWIJZEN: $\angle EOD = 90^o$.
BEWIJS:
(1) $\angle AOE + \angle EOC + \angle COD + \angle DOB = 180^o$ (gesterkte hoek).
(2) $\angle AOE = \angle EOC$, $\angle COD = \angle DOB$ (gegeven).
(3) $2\angle EOC + 2\angle COD = 180^o$ (volgt uit (1) en (2)).
(4) $\angle EOC + \angle COD = 90^o$ (volgt uit (3)).
(5) $\angle EOD = 90^o$. □



Stelling 1.2.3. De deellijnen van twee overstaande hoeken vormen een gestrekte hoek.

GEGEVEN: AB snijdt CD in O; $\angle AOE = \angle EOC$; $\angle BOF = \angle FOD$.
TE BEWIJZEN: $\angle EOF = 180^o$.
BEWIJS:
(1) $\angle AOE + \angle EOC + \angle COB = 180^o$ (gestrekte hoek).
(2) $\angle AOE = \angle EOC = \angle FOD = \angle BOP$,
(i) gegeven, (ii) overstaande hoek en (iii) gegeven.
(3) $\angle EOF = \angle EOC + \angle COB + \angle BOF = 180^o$.
□



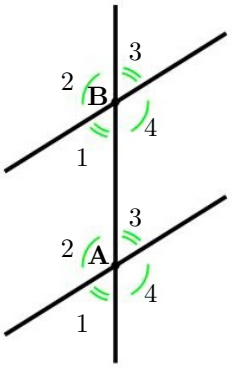
Stelling 1.2.4. Als twee rechten elk evenwijdig zijn met een derde rechte, dan zijn de eerste twee onderling ook evenwijdig.
GEGEVEN: $m // l$, $n // l$.
TE BEWIJZEN: $m // n$.
BEWIJS: Er zijn maar twee mogelijkheden:
(1) m snijdt n in een punt P, of (2) m snijdt n niet.

[3]Als een bewijs klaar is, is het duidelijk dat de stelling waar is. Je kunt de stelling dan afsluiten met de letters QED. Dat is een Latijnse afkorting die staat voor: 'Quod Erat Demonstrandum'. Dat betekent: 'Wat bewezen moest worden'. Tegenwoordig vinden wiskundigen dat ouderwets en sluiten ze een bewijs af met het teken (aan het einde van de regel) □.

Mogelijkheid (1) is uitgesloten omdat dan (volgens axioma 1.2) door het punt P twee verschillende lijnen parallel zouden zijn met de lijn l. Als (1) niet waar is, kan alleen (2) waar zijn. [4] □

Stelling 1.2.5. Als een rechte één van twee evenwijdige lijnen snijdt, dan snijdt hij de andere ook.
GEGEVEN: $m // l$ en s snijdt l in A.
TE BEWIJZEN: s snijdt m.
BEWIJS: Er zijn twee mogelijkheden: (1) $s // m$, of (2) s snijdt m.
Mogelijkheid (1) is uitgesloten omdat dan (volgens axioma 1.2) door het punt A twee verschillende lijnen parallel zouden zijn met de lijn m. □

1.3 Stellingen over evenwijdige lijnen gesneden door een derde



Bepaling 1.3.1. Wanneer twee lijnen gesneden worden door een derde zijn er acht hoeken te onderscheiden: $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ (zie figuur).
A_1 en B_1 heten *overeenkomstige hoeken*,
net als A_2 en B_2, of A_3 en B_3 of A_4 en B_4.
A_2,A_3,B_1,B_4 heten *binnenhoeken*.
A_1,A_4,B_2,B_3 heten *buitenhoeken*.
A_2 en B_4 zijn *verwisselende binnenhoeken*, net als A_3 en B_1.
A_1 en B_3 zijn *verwisselende buitenhoeken*, net als A_4 en B_2.

Stelling 1.3.2. Bij twee evenwijdige lijnen, gesneden door een derde, zijn twee overeenkomstige hoeken gelijk.
GEGEVEN: $m // l$, s snijdt l in A, s snijdt m in B.
TE BEWIJZEN: $\angle A_1 = \angle B_1$.
BEWIJS: Beschouw de verschuiving met *verschuivings-vector* $\overrightarrow{AB}$. ([5])
Hierbij $A \to B$ (gegeven), $l \to m$ (ax.1.4), $s \to s$ (ax.1.1), $\angle A_1 \to \angle B_1$,
dus $\angle A_1 = \angle B_1$. □

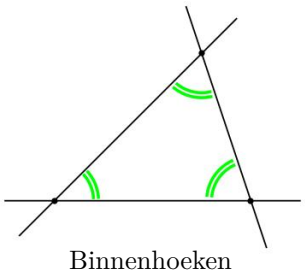
Gevolg 1.3.3. Uit Stelling 1.3.2 en Stelling 1.2.1 volgt direkt dat verwisselende binnenhoeken gelijk zijn.

Stelling 1.3.4. Als bij twee rechten gesneden door een derde, twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, dan zijn die (eerste) twee rechten evenwijdig.
GEGEVEN: s snijdt l in A, s snijdt m in B, $\angle A_3 = \angle B_3$.
TE BEWIJZEN: $m // l$.
BEWIJS: Beschouw de verplaatsing die $\angle A_3 \to \angle B_3$ overvoert en de lijn s op zichzelf afbeeldt. Uit $\angle A_3 \to B_3$ volgt dan $l \to m$ en volgens Axioma 1.4 is nu $m // l$. □

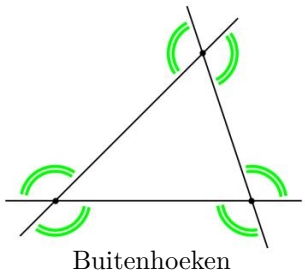
[4] Dit is een bijzonder soort bewijs. Het gaat zó: (1) Eén van twee mogelijkheden moet waar zijn; (2) een van de twee mogelijkheden blijkt niet te kunnen kloppen; (3) dan is dus de andere mogelijkheid waar. Zo'n bewijs heet een *bewijs uit het ongerijmde*.
[5] Een *vector* is een afstand met een richting

1.4 Driehoeken en driehoeksstellingen

Bepaling 1.4.1. Een *driehoek* ($\triangle$) is een figuur gevormd door drie lijnstukken die drie punten verbinden welke niet op een rechte lijn liggen. In een driehoek kennen we drie *zijden* en drie *binnenhoeken*.
Een *buitenhoek* is een nevenhoek van een binnenhoek.
Een driehoek met uitsluitend scherpe hoeken heet een *scherphoekige driehoek*.
Is één hoek een rechte hoek, dan spreken we van een *rechthoekige driehoek*.
Is één hoek een stompe hoek, dan spreken we van een *stomphoekige driehoek*.
Een *zwaartelijn* (ook wel *mediaan*) verbindt een hoekpunt met het midden van de overliggende zijde.
Een *hoogtelijn* is de loodlijn vanuit een hoekpunt op de overliggende zijde.
Een *voetpunt* is het snijpunt van een hoogtelijn met de zijde waarop deze loodrecht staat.



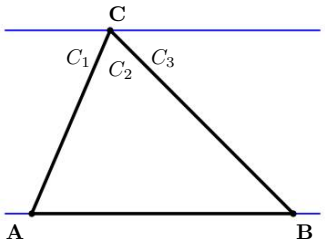
Binnenhoeken



Buitenhoeken

Stelling 1.4.2. De som van de (binnen)hoeken van een driehoek bedraagt 180^o.

GEGEVEN: $\triangle ABC$
TE BEWIJZEN: $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^0$.
BEWIJS: Teken een lijn door C evenwijdig aan lijn AB.
We krijgen dan de drie hoeken $\angle C_1$, $\angle C_2$ en $\angle C_3$ (zie figuur).
Volgens Gevolg 1.3.3 is nu $\angle C_1 = \angle CAB$ en $\angle C_3 = \angle ABC$.
Nu is $\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180^0$ (gestrekte hoek),
dus ook $\angle CAB + \angle BCA + \angle ABC = 180^0$. □



1.4.1 De gelijkbenige driehoek

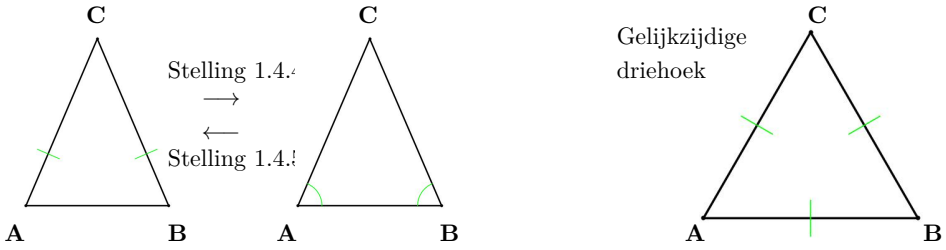
Bepaling 1.4.3. Een driehoek met twee gelijke zijden heet *gelijkbenig*. Dergelijke zijden heten de *benen* van de driehoek. De derde zijde heet de *basis* van de driehoek. De hoeken aan de basis heten *basishoeken*, de derde hoek heet *tophoek*.

Stelling 1.4.4. In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

GEGEVEN: $\triangle ABC$ en $\overline{AC} = \overline{BC}$.
TE BEWIJZEN: $\angle A = \angle B$.

BEWIJS: Je kunt eenvoudig zien dat het punt C op de middelloodlijn van AB ligt [6] .
Door spiegeling om de middellooodlijn van AB, die ook de bisectrix is van $\angle C$, valt de figuur op zichzelf. Dus is $\angle A = \angle B$. □

Stelling 1.4.5.
In een driehoek met twee gelijke hoeken zijn de daartegenover gelegen zijden gelijk.
GEGEVEN: $\triangle ABC$ en $\angle A = \angle B$.
TE BEWIJZEN: $\overline{AC} = \overline{BC}$.
BEWIJS: Door spiegeling om de middelloodlijn valt de figuur op zichzelf.
Dus valt ook AC op AB. □

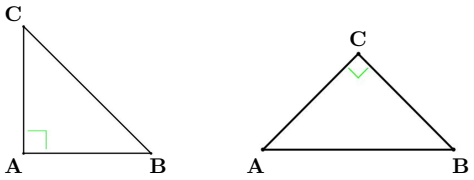


1.4.2 De gelijkzijdige driehoek

Bepaling 1.4.6. Een driehoek met drie gelijke zijden heet *gelijkzijdig*.

Vanwege Stelling 1.4.4 zijn dus de drie hoeken gelijk. Deze zijn dan elk 60^o. Andersom is ook: in een driehoek met drie hoeken van 60^o zijn de zijden gelijk (vanwege Stelling 1.4.5).

1.4.3 De gelijkbenige rechthoekige driehoek



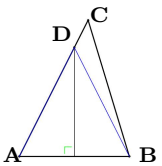
In een gelijkbenig rechthoekige driehoek zijn de scherpe hoeken elk 45^o.

1.4.4 Congruentie van driehoeken

Congruente driehoeken kunnen door verplaatsing in elkaar worden overgevoerd (Bepaling 1.1.22). Als twee driehoeken congruent zijn dan zijn de elementen van de driehoek dus stuk voor stuk gelijk. We noemen elementen die door verplaatsing in elkaar overgaan *overeenkomstige elementen*.

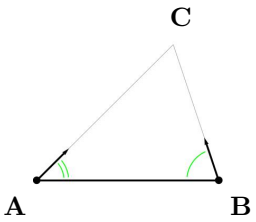
---

6 Stel je eens voor dat C niet op de middellooodlijn ligt, dan krijgen we een situatie waarbij de middelloodlijn een been in een ander punt (D) snijdt. Door de spiegeling om de middelloodlijn weten we $\overline{AD} = \overline{BD}$. Omdat $\triangle ABC$ gelijkbenig is weten we dat $\overline{AC} = \overline{BC}$. Hieruit volgt dat $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$. Dat kan niet waar zijn omdat er maar één kortste weg (rechte lijn) is tussen B en C. De afstand $\overline{DC}$ moet dus nul zijn. Dus C ligt op de middelloodlijn. Omdat $\triangle ABC$ door spiegeling op zichzelf valt is de middelloodlijn van AB ook de bisectrix van de top-hoek.



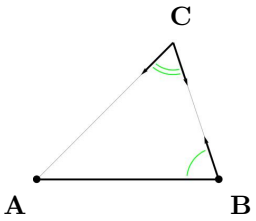
Stelling 1.4.7 (**HZH**). Twee driehoeken zijn congruent als ze een zijde en twee aanliggende hoeken gelijk hebben.

GEGEVEN: Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$;
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\angle A' = \angle A$ en $\angle B' = \angle B$.
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
BEWIJS: Verplaats het lijnstuk $A'B'$ zodat het op AB past. Als C' en C niet aan dezelfde kant van de lijn AB liggen, spiegel je de driehoek $\triangle A'B'C'$ om AB zodat ze wel aan dezelfde kant liggen. Nu past $\angle A'$ op $\angle A$ en $\angle B'$ op $\angle B$.
Dus valt de lijn $A'C'$ langs AC en de lijn $B'C'$ langs BC.
Hieruit volgt dat het punt C' op C valt.
Dus passen de driehoeken precies op elkaar: ze zijn congruent. □



Stelling 1.4.8 (**ZHH**). Twee driehoeken zijn congruent als ze een zijde en een aanliggende hoek en een overstaande hoek gelijk hebben.

GEGEVEN: Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$;
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\angle A' = \angle A$ en $\angle C' = \angle C$.
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
BEWIJS: $\angle A = 180^o - \angle B - \angle C = 180^o - \angle B' - \angle C' = \angle A'$.
Nu volgt het bewijs direkt uit Stelling 1.4.7. □

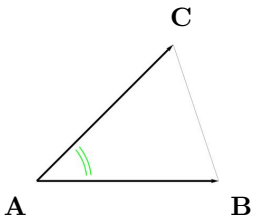


Stelling 1.4.9 (**ZHZ**). Twee driehoeken zijn congruent als ze twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben.

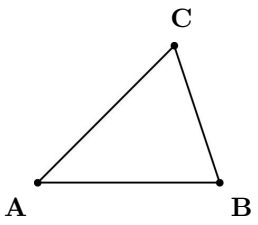
GEGEVEN: Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$;
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{A'C'} = \overline{AC}$ en $\angle A' = \angle A$.

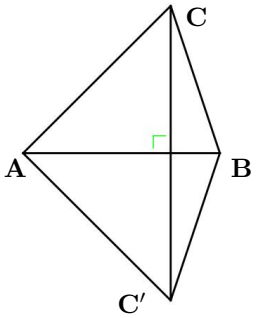
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

BEWIJS: We kunnen de driehoeken eenvoudig op elkaar passen. □



Stelling 1.4.10 (**ZZZ**). Twee driehoeken zijn congruent als ze drie zijden gelijk hebben.
GEGEVEN: Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$;
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{A'C'} = \overline{AC}$ en $\overline{B'C'} = \overline{BC}$.

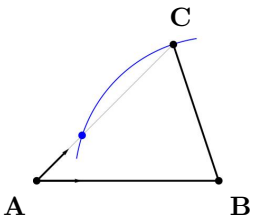




TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
BEWIJS: Verplaats $\triangle A'B'C'$ zó dat $A'B'$ langs AB valt en dat C' en C aan verschillende kanten van de lijn AB liggen. Dan zijn $\triangle C'AC$ en $\triangle C'BC$ gelijkenige driehoeken, zodat $\angle BAC = \angle BAC'$ en $\angle ABC = \angle ABC'$. Nu hebben de twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ dus de zijde AB en $A'B$ gemeen, met hun beider aanliggende hoeken. Volgens stelling 1.4.7 zijn beide driehoeken dus congruent. □

Stelling 1.4.11 (ZZH). Twee driehoeken zijn congruent als ze twee zijden en een overliggende hoek gelijk hebben, mits de andere hoeken van dezelfde soort zijn (d.w.z. mits de andere overliggende hoeken beide stomp of beide scherp zijn).

GEGEVEN: Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$;
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ en $\angle A' = \angle A$.
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
BEWIJS: Het bewijs volgt als we de driehoek $\triangle A'B'C'$ verplaatsen zodat$A'B'$ langs AB valt, en C' aan dezelfde kant van AB ligt als C. Nu tekenen we een cirkel met hoekpunt B en lengte $\overline{B'C'} = \overline{BC}$. Dan liggen C en C' beide op de cirkel en de cirkel snijdt (of raakt) de lijn AC. C' moet ook op de lijn AC liggen omdat $\angle A' = \angle A$. Daarom is òf C' gelijk aan C, òf is C' het andere snijpunt van AC met de cirkel. De conditie "mits de andere hoeken van dezelfde soort zijn" sluit de laatste mogelijkheid uit. Dus C' valt samen met C. Dus passen de driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ precies op elkaar: ze zijn congruent. □



1.5 ** Euclides van Alexandrië **

Euclides van Alexandrië (ca 325 vC – ca 265 vC) is wel de bekendste wiskundige uit de klassieke oudheid, beroemd om zijn meetkundig werk *Elementen* ($\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$). Deze *Elementen* hebben zeer lang invloed gehad op de manier waarop de wiskunde beoefend werd, en dat maakt Euclides op het terrein van de wiskunde de belangrijkste leermeester aller tijden. Er is echter weinig over zijn leven bekend, behalve dat hij les gaf in Alexandrië in Egypte. Proclus, de laatste grote Griekse filosoof. die rond 450 nC leefde, schreef:

Figuur 1.1: Euclides

"Niet veel jonger dan deze [leerlingen van Plato] is Euclides die de "Elementen" samenstelde, waarin hij veel werk van Eudoxos verzamelde en veel van Theaitetos afmaakte en waarin hij verder onweerlegbare bewijzen aanvoerde voor de zaken die eerder minder streng aangetoond waren. Deze man werd geboren in de tijd van de eerste Ptolemaeers, want ook Archimedes -die ook na de eerste Ptolemaeers leefde- maak melding van Euclides. En ze vertellen ook het verhaal dat Ptolemaios hem eens vroeg of er een kortere weg tot de wiskunde was dan de Elementen, en dat Euclides daarop antwoordde dat er geen koninklijk pad naar de meetkunde is. Hij is dus jonger dan de school van Plato en ouder dan Eratosthenes en Archimedes, want die waren tijdgenoten van elkaar zoals Eratostenes zegt. En in opzet was Euclides een volgeling van Plato en vertrouwd met diens filosofie, en daarom ook worden op het eind van de Elementen ook de zogenaamde Platonische figuren behandeld." (Proclus, In primum Euclidis elementorum librum commentarii, 68)

Er zijn meer klassieke auteurs die over Euclides schreven, maar hun verhalen worden niet betrouwbaar geacht. Die bronnen vallen in twee groepen uiteen. De eerste is afkomstig van Arabische schrijvers die zeggen dat Euclides de zoon was van Naukrates en dat hij in Tyrus

geboren was. Historici geloven dat dat geheel door die auteurs verzonnen is. De tweede groep zegt dat hij was geboren in Megara. Dit is terug te voeren op een fout van de eerste auteur die dit vermelde. Er bestond wel een Euclides uit Megara. maar dat was een filosoof die een eeuw eerder leefde dan Euclides van Alexandrië. Het is niet zo toevallig dat er twee geleerden waren die Euclides heetten want Euclides was indertijd een veel gebruikte naam en er zijn uit die tijd talloze mensen met die naam te vinden.

Terugkomend op het citaat van Proclus hierboven, kunnen we opmerken dat er geen inconsistentie is in de data hier. Echter, hoewel we niet zeker weten naar welke referentie in Archimedes' werk Proclus verwijst, wordt er in het werk dat ons is naglaten maar één referentie naar Euclides gevonden en die staat in in Archimedes' verhandeling *Over de bol en de cylinder*. De voor de hand liggende conclusie is dus dat Proclus' bewering klopt en dit werd algemeen als waarheid aangenomen totdat het in twijfel getrokken werd door Hjelmslev in [8]. Deze beweert dat de referentie later aan Archimedes' werk was toegevoegd. En zeker is die referentie wat vreemd. Indertijd was het inderdaad geen traditie om zulke referenties te geven en bovendien zijn er veel andere plaatsen waar het veel relevanter zou zijn geweest om naar Euclides te verwijzen en waar zo'n referentie niet voorkomt. Ondanks Hjelmslev's bewering dat die passage later is ingevuld, schrijft Bulmer-Thomas in [2]: *Hoewel we niet langer op deze referentie kunnen vertrouwen, laat een algehele bestudering van Euclides' werk toch zien dat het moet zijn geschreven ná Plato's leerlingen en vóór Archimedes.*

Figuur 1.2: Euclides in Raffael's schilderij 'De school van Athene'

Omdat we verder van Euclides niets weten moeten we ons maar op zijn werk concentreren, na een paar opmerkingen geplaatst te hebben bij mogelijk historische gebeurtenissen. Euclides moet wel in Plato's Academie in Athene gestudeerd hebben om de meetkunde van Eudoxus en Theaetetus te hebben leren kennen, waarmee hij zo vertrouwd was.

Ieder van Euclides' werken moet het zonder een voorwoord stellen. Tenminste, er is er geen overgeleverd en daarom is het hoogst onwaarschijnlijk dat ze bestaan hebben. Daarom krijgen we ook geen kijk op Euclides' karakter, zoals we dat soms vanuit een voorwoord van andere schrijvers krijgen. Pappus schrijft over Euclides: *... hij was uiterst geschikt en vriendelijk jegens iedereen die in een of andere mate de wiskunde kon bevorderen, en zoals het hoort, op geen enkele manier agressief en hij was wel heel precies maar spreide daaromtrent geen valse pretenties ten toon....*

Er zijn mensen die zeggen dat ook deze passage later aan Pappus is toegevoegd en later in het geciteerde stuk (in het vervolg dat we niet vertaald hebben) wordt (bijna zeker onverdiend) scherp over Apollonius geoordeeld. Het beeld dat Pappus van Euclides schetst is echter zeker in

lijn met wat we uit zijn wiskundige teksten lezen. Een ander verhaal wordt verteld door Stobaeus (Anthologium 2.31.114): *"Iemand die juist begonnen was meetkunde te leren vroeg Euclides, toen hij de eerste stelling had leren kennen: 'Wat zal ik er beter van worden als ik dat leer?' En Euclides riep zijn knechtje en zei 'Geef hem een tri-obool zodat-ie iets verdient met wat hij leert.' "*

Euclides' beroemdste boek is dus zijn meetkundig werk *Elementen*. Het boek is een verzameling van de kennis die bijna 2200 jaar het centrale thema was voor het wiskundeonderwijs. Waarschijnlijk was geen van de resultaten die in de *Elementen* staan voor het eerst door Euclides bewezen, maar de manier waarop het materiaal gerangschikt is en de wijze van presenteren is zeker van hem.

Omdat bijna iedereen alleen de *Elementen* van Euclides kent, is het aardig te weten dat hij ook andere boeken geschreven heeft[7], onder andere de boeken *Optica*, *Catoptrica* (over spiegels), en *Phaenomena* (over sterrekunde).

Dat Euclides van raadseltjes hield, is duidelijk uit een gedichtje dat ook nog van hem overgeleverd is:

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον,	Een muildier en een ezel liepen wijn te verslepen
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖο.	maar de ezel zuchtte onder het gewicht van haar last.
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·	En het muildier dat haar zo zwaar zag klagen vroeg haar:
μῆτερ, τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠύτε κούρη;	"Moeder wat loop je daar klaaglijk als een meisje te huilen:
εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα,	als je me één maatje geeft draag ik het dubbele van jou,
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.	maar als je er ééntje van mij neemt heb je precies evenveel."
εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπίστορ.	Zeg me hoeveel ze droegen, beste wiskunde meester.

1.6 Constructies met passer en lineaal

Een constructie van een meetkundige figuur welke aan bepaalde eisen voldoet, is het opbouwen of tekenen van die figuur. Dit kan alleen in gedachte gebeuren omdat een meetkundige figuur niet tastbaar is. Wij werken toch met potlood, lineaal en passer om ons voorstelligsvermogen een beetje te helpen.

Bij het samenstellen van een figuur nemen we aan dat we (alleen) een paar eenvoudige grondconstructies (ook wel *postulaten* genoemd) zonder meer kunnen uitvoeren.
Deze grondconstructies zijn:
P1: het nemen van een punt in een figuur.
P2: het construeren van een rechte lijn door twee gegeven punten.
P3: het nemen van een snijpunt van twee snijdende lijnen.
P4: het construeren van een cirkel met een bepaald middelpunt en een bepaalde straal.

Deze postulaten komen er op neer dat we bij de constructies alléén een passer en een lineaal (zonder cm-verdeling) mogen gebruiken. Dit is duidelijk weer een spelletje: hoeveel kun je wel niet doen als je heel weinig (hulp)middelen gebruikt.

Zoals je bij een stelling (i) *Gegeven*, (ii) *Te bewijzen*, en (iii) *Bewijs* hebt, zo deelt men bij de constructie de zaak als volgt in: (i) Gegeven; (ii) Te constueren; (iii) Constructie (met figuur), en (iv) Discussie. De discussie dient om duidelijk te maken dat het doel bereikt is.

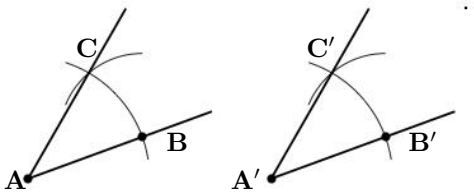
[7] die ook nog zijn overgebleven!

1.6.1 Het construeren van een gelijkzijdige driehoek

Constructie 1.6.1. Construeer een gelijkzijdige driehoek waarvan één van de zijden gegeven is.
GEGEVEN: Een lijnstuk AB.
TE CONSTRUEREN: Een gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE:
Teken een cirkel met middelpunt A en straal van dezelfde lengte als AB. (Dat kan volgens P4.) Teken een cirkel met middelpunt B en straal van dezelfde lengte als AB. (Dat kan ook volgens P4.) De twee getekende lijnen snijden elkaar en bepalen zo de punten C en C' die aan weerzjden van AB gelegen zijn. (Dat kan volgens P3.) Teken AC en BC. (Dat kan volgens P2.) Nu voldoet de driehoek ABC aan de gestelde eisen. Op dezelfde manier voldoet ook de driehoek ABC' aan de gestelde eisen. □

1.6.2 Het verplaatsen van een gegeven hoek

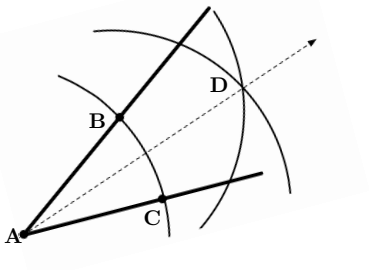
Constructie 1.6.2. Construeer een hoek die gelijk is aan een gegeven hoek en waarvan een gegeven halve lijn één van de benen is.
GEGEVEN: Een hoek $\angle BAC$ en een halve lijn $A'B'$.
TE CONSTRUEREN: Een hoek $\angle B'A'C'$, even groot als $\angle BAC$.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE: ([8])



Kun je nadaan welke postulaten en welke stellingen nodig zijn om te laten zien dat C' bepaald kan worden en waarom hoek $\angle B'A'C'$ even groot als $\angle BAC$? □

1.6.3 Een bisectrix construeren

Constructie 1.6.3. Construeer de deellijn van een gegeven hoek.
GEGEVEN: Een hoek $\angle CAB$.
TE CONSTRUEREN: Een halve lijn AD zodat $\angle CAD = \angle DAB$.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE: Kun je de constructie uitvoeren en uitleggen waarom AD de bisectrix is?

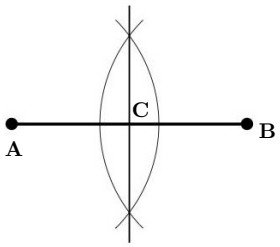


□

[8] Discussies lezen is vaak saai. Je kunt ze beter zelf verzinnen.

1.6.4 Een lijnstuk halveren

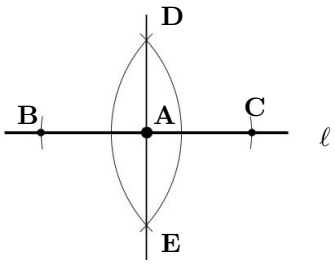
Constructie 1.6.4. Construeer het midden van een gegeven lijnstuk.
GEGEVEN: Een lijnstuk AB.
TE CONSTRUEREN: Een punt C op AB zodat $\overline{AC} = \overline{CB}$.



CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE: □

1.6.5 Een loodlijn in een punt van een lijn oprichten

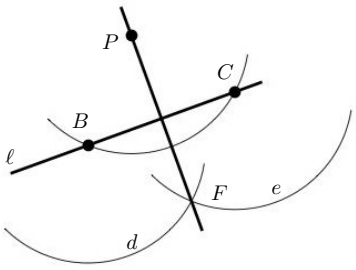
Constructie 1.6.5. Construeer een loodlijn door een gegeven punt op een lijn.
GEGEVEN: Een punt A op een lijn ℓ.
TE CONSTRUEREN: Een lijn door A die loodrecht staat op ℓ.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE:



□

1.6.6 Uit een punt een loodlijn neerlaten op een rechte

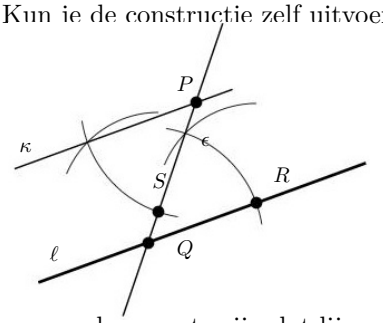
Constructie 1.6.6. Construeer de loodlijn uit een punt P neergelaten op een lijn l.
GEGEVEN: Een lijn ℓ en een punt P buiten deze lijn.
TE CONSTRUEREN: Een lijn door het punt P die loodrecht staat op de lijn ℓ.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE:



□

1.6.7 Door een punt buiten een lijn een evenwijdige lijn construeren

Constructie 1.6.7. Construeer door een gegeven punt buiten een gegeven lijn de rechte evenwijdig aan die lijn.
GEGEVEN: Een lijn ℓ en een punt P buiten de lijn.
TE CONSTRUEREN: Een rechte lijn door het punt P die evenwijdig loopt aan de lijn ℓ.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE: Kun je de constructie zelf uitvoeren?



Welke stellingen gebruiken we om er zeker van te zijn dat lijn κ evenwijdig loopt aan ℓ? □

1.6.8 Constructies om zelf uit te voeren

Opgave 1.6.8. Construeer een driehoek waarvan één zijde en twee aanliggende hoeken gegeven zijn.

Opgave 1.6.9. Construeer een driehoek waarvan één zijde en een aanliggende hoek en een overstaande hoek gegeven zijn.

Opgave 1.6.10. Construeer een driehoek waarvan twee zijden en de ingesloten hoek gegeven zijn.

Opgave 1.6.11. Construeer een driehoek waarvan drie zijden gegeven zijn.

Opgave 1.6.12. Construeer een driehoek waarvan twee zijden en de hoek tegenover een van die zijden gegeven zijn.

1.7 Vierhoeken

Bepaling 1.7.1. Een *vierhoek* (□)is een figuur bestaande uit vier punten: A, B, C en D, waarvan er niet drie op een rechte lijn liggen, en de lijnstukken AB, BC, CD, DA. [9]
De punten A, B, C en D heten de *hoekpunten*; AB, BC, CD, DA zijn de *zijden*. $\angle A$ en $\angle C$ zijn *overliggende hoeken*, evenals $\angle B$ en $\angle D$. De lijnstukken AB en CD zijn *overliggende zijden*, evenals BC en DA.

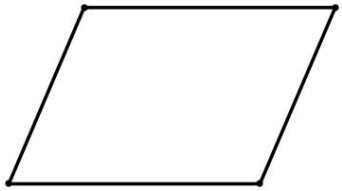
1.7.1 Bijzondere vierhoeken

Bepaling 1.7.2. Als één paar overliggende zijden parallel is en het andere niet, dan heet de vierhoek een *trapezium*. De *niet* evenwijdige zijden van het trapezium heten de *benen*. Een trapezium met gelijke benen heet een *gelijkbenig trapezium*.
Een *rechthoekig trapezium* is een trapezium waarin één der benen loodrecht staat op de evenwijdige zijden.
Een vierhoek waarvan twee paar overliggende zijden parallel zijn, heet een *parallellogram*.

[9] Voor het gemak kiezen we de letters op zo'n manier dat de zijden elkaar niet snijden.

Een parallellogram met een rechte hoek heet een *rechthoek*.
Een *ruit* is een parallellogram waarin twee opeenvolgende zijden gelijk zijn.
Een *vierkant* is een ruit die ook nog rechthoek is (dwz een ruit met een rechte hoek).

Stelling 1.7.3. De som van de (binnen)hoeken van een vierhoek bedraagt 360^o.
GEGEVEN: $\square ABCD$.
TE BEWIJZEN: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$.
BEWIJS: Trek de diagonaal BD.
$\angle A + \angle B_2 + \angle D_2 = 180^o$, en $\angle C + \angle B_1 + \angle D_1 = 180^o$.
Optellen levert $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$. □



Het parallellogram

1.7.2 Het parallellogram

Met behulp van de axioma's en de stellingen die we hierboven behandeld hebben zijn de onderstaande stellingen over het parallellogram eenvoudig te bewijzen. Probeer één of twee van die bewijzen precies op te schrijven. [10]

Stelling 1.7.4. In een parallellogram zijn twee opeenvolgende hoeken elkaars supplement.

Stelling 1.7.5. In een parallellogram zijn overliggende hoeken gelijk.

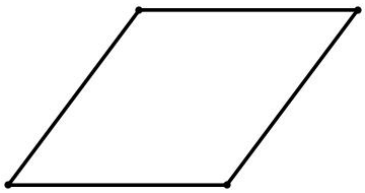
Stelling 1.7.6. In een parallellogram zijn overliggende zijden gelijk.

Stelling 1.7.7. In een parallellogram halveren de diagonalen elkaar.

Stelling 1.7.8. Als in een vierhoek twee overliggende zijden gelijk en evenwijdig zijn, dan is de vierhoek een parallellogram.

Stelling 1.7.9. Als in een vierhoek twee paar overliggende zijden gelijk zijn, dan is de vierhoek een parallellogram.

Stelling 1.7.10. Als in een vierhoek de twee diagonalen elkaar halveren, dan is de vierhoek een parallellogram.



De ruit

[10] Hint voor stelling 1.7.4: zie sectie 1.3. Hint voor stelling 1.7.5: gebruik stelling 1.7.4. Hint voor stelling 1.7.6: trek een diagonaal en gebruik stelling 1.4.7. Hint voor stelling 1.7.7: trek twee diagonalen en gebruik stelling 1.4.8. Hint voor stelling 1.7.8: trek een diagonaal en gebruik stellingen 1.4.9 en 1.3.4. Hint voor stelling 1.7.9: trek een diagonaal en gebruik stellingen 1.4.10 en 1.3.4. Hint voor stelling 1.7.10: trek twee diagonalen en gebruik stelling 1.4.9 en .... .

1.7.3 De ruit

Aangezien een ruit een parallellogram is gelden alle parallellogramstellingen ook voor een ruit.

Stelling 1.7.11. In een ruit zijn alle zijden gelijk.
BEWIJS: Dit volgt direkt uit de definitie van een ruit en Stelling 1.7.6. □

Kun je op dezelfde manier, met logisch redeneren ook de vijf ruitstellingen hieronder bewijzen? [11]

Stelling 1.7.12. In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar en delen de hoeken doormidden.

Stelling 1.7.13. Een parallellogram waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan is een ruit.

Stelling 1.7.14. Een parallellogram waarin een diagonaal een hoek halveert is een ruit.

Stelling 1.7.15. De middens van de zijden van een rechthoek zijn de hoekpunten van een ruit.

Stelling 1.7.16. De middens van de zijden van een ruit zijn de hoekpunten van een rechthoek.

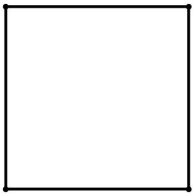
De rechthoek

1.7.4 De rechthoek

Ook de twee onderstaande stellingen over een rechthoek zijn niet zo moeilijk te bewijzen.[12]

Stelling 1.7.17. In een rechthoek zijn de diagonalen gelijk.

Stelling 1.7.18. Als in een parallelogram de diagonalen gelijk zijn, dan is dit parallelogram een rechthoek.



Het vierkant

Stelling 1.7.19. De middens van de zijden van een vierkant zijn de hoekpunten van een vierkant.

[11] Hint stelling 1.7.12: de vier driehoeken die de diagonalen uit het parallellogram snijden zijn congruent. Hint stelling 1.7.13: volgens stelling 1.7.7 halveren de diagonalen elkaar. Omdat de diagonalen loodrecht op elkaar staan zijn de vier driehoeken die de diagonalen uit het parallellogram snijden congruent. Daarom zijn de zijden van het parallellogram aan elkaar gelijk. Hint stelling 1.7.14: spiegel om een diagonaal. Hint stelling 1.7.15: spiegel om de middelloodlijn van een zijde. Hint stelling 1.7.16: laat zien dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan en gevruik Stelling 1.7.13.

[12] Hint stelling 1.7.17: gebruik stelling 1.4.9. Hint stelling 1.7.18: de twee diagonalen maken twee congruente driehoeken (stelling 1.4.10). Hint stelling 1.7.19: combineer stelling 1.7.17 en stelling 1.7.18.

1.7.5 Afstand en oppervlakte

Bepaling 1.7.20. De *afstand tussen twee punten* A en B is de lengte van het lijnstuk AB. We geven deze afstand aan door $\overline{AB}$ (een streepje boven het lijnstuk).
De *afstand tussen een punt* A *en een lijn* ℓ is de afstand tussen A en P, waarbij P het snijpunt is van ℓ en de loodlijn door A op ℓ.
De *afstand tussen twee evenwijdige lijnen* m en n is de afstand van een punt A op m en de lijn n. (Vanwege stelling 1.7.6 maakt het niet uit waar je het punt A op m kiest.) ([13])

We willen nu aan een begrensd deel van het platte vlak oppervlak toekennen en we wensen dat zó te doen dat congruente figuren een gelijk oppervlak hebben en dat het oppervlak van twee disjuncte figuren[14] tesamen, de som is van de figuren afzonderlijk. Door de volgende definitie kunnen we de lengte-maat en de oppervlakte-maat aan elkaar koppelen. De eenheid van oppervlakte wordt zo de oppervlakte van een vierkant met een zijde met de eenheids-lengte.

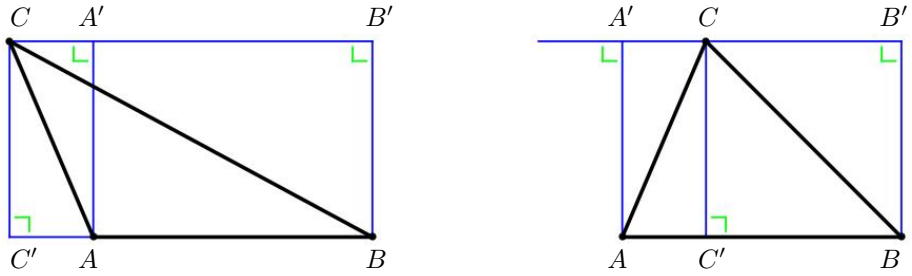
Bepaling 1.7.21. De *oppervlakte* van een rechthoek wordt gedefinieerd als het product van de lengtes van twee loodrechte zijden.

Opmerking 1.7.22. We geven de oppervlakte van een vierhoek $ABCD$ aan met $\overline{\square ABCD}$ en de oppervlakte van een driehoek ABC aan met $\overline{\triangle ABC}$.

Stelling 1.7.23 (Oppervlakte van een driehoek). De oppervlakte van een driehoek is het halve product van de lengte van de basis en de lengte van de hoogtelijn op die basis.
GEGEVEN: $\triangle ABC$; CC' is de hoogtelijn uit C op AB.
TE BEWIJZEN: $\overline{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\ \overline{AB} \times \overline{CC'}$.
BEWIJS: Zie figuur 1.3

$$\overline{AB} \times \overline{CC'} = \overline{\square A'B'BA} = \overline{\square CB'BC'} \pm \overline{\square A'CC'A} =$$
$$= 2\ \overline{\triangle C'CB} \pm 2\ \overline{\triangle C'CA} = 2\ (\overline{\triangle C'CB} \pm \overline{\triangle C'CA}) = 2\ \overline{\triangle ABC}.$$

Merk op dat '$\pm$' staat voor '$-$' in de linkerfiguur en '$+$' in de rechterfiguur. □



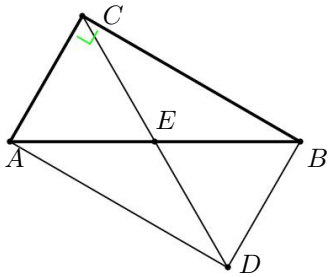
Figuur 1.3: Oppervlakte van een driehoek

1.7.6 De stelling van Pythagoras

Stelling 1.7.24. Het midden van de schuine zijde[15] van een rechthoekige driehoek bezit gelijke afstanden tot de drie hoekpunten van die driehoek.
Anders gezegd: de zwaartelijn uit het rechthoekpunt van een rechthoekige driehoek is gelijk aan

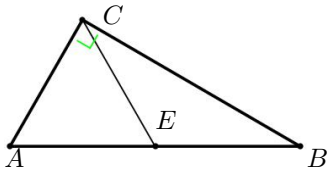
[13] De 'afstand' is dus duidelijk altijd de 'kortste afstand'!
[14] 'Disjuncte figuren' zijn figuren die niet over elkaar vallen.
[15] de schuine zijde van een rechthoekige driehoek wordt ook wel *hypothenusa* genoemd

de helft van de hypothenusa.



GEGEVEN: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^o$, $\overline{AE} = \overline{EB}$.
TE BEWIJZEN: $\overline{CE} = \overline{AE} = \overline{EB}$.
BEWIJS: Verleng CE zodat $\overline{CE} = \overline{ED}$. Nu is $\square ADBC$ een parallellogram (volgt uit stelling 1.7.10). Bovendien heeft het parallellogram een rechte hoek, en is dus een rechthoek. Nu volgt de stelling uit stelling 1.7.17. □

Stelling 1.7.25. Als in een driehoek een zwaartelijn gelijk is aan de helft van de zijde waarop ze staat, dan is de driehoek rechthoekig.



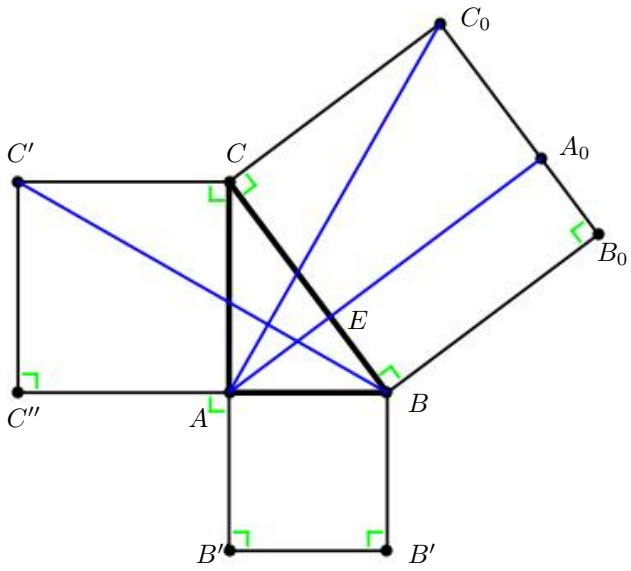
GEGEVEN: $\triangle ABC$, $\overline{CE} = \overline{AE} = \overline{EB}$.
TE BEWIJZEN: $\angle ACB = 90^o$.
BEWIJS: Uit $\overline{CE} = \overline{AE}$ volgt $\angle EAC = \angle ECA$. Uit $\overline{CE} = \overline{EB}$ volgt $\angle EBC = \angle ECB$. Omdat $\angle ABC + \angle BCE + \angle ECA + \angle CAB = 180^o$ volgt $\angle ACB = 90^o$. □

Gevolg 1.7.26. Vanuit een punt van een cirkelomtrek zien we iedere middellijn in een rechte hoek.

Stelling 1.7.27 (**Stelling van Pythagoras).** In een rechthoekige driehoek is de som van het kwadraat van de rechthoekzijden gelijk aan het kwadraat van de hypothenusa.
GEGEVEN: $\triangle ABC$ waarin $\angle BAC = 90^o$.
TE BEWIJZEN: $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CB}^2$.
BEWIJS:

(1) $\overline{\square C_0CBB_0} = \overline{\square C_0CEA_0} + \overline{\square A_0EBB_0}$	
(2) $\overline{\square C_0CEA_0} = 2 \times \overline{\triangle C_0CA}$	(stelling 1.7.23).
(3) $\overline{\triangle C_0CA} = \overline{\triangle CC'B}$	(congruente driehoeken ZHZ).
(4) $\overline{\square ACC'C''} = 2 \times \overline{\triangle CC'B}$	(stelling 1.7.23).
(5) $\overline{\square ACC'C''} = \overline{\square C_0CEA_0}$	(volgt uit (2),(3) en (4)).
(6) $\overline{\square ABB'B''} = \overline{\square A_0EBB_0}$	(op dezelfde manier als (5)).
(7) $\overline{\square ACC'C''} + \overline{\square ABB'B''} = \overline{\square C_0CBB_0}$	(volgt uit (1),(6) en (7)).
(8) $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CB}^2$	(volgt direkt uit (7)).

□

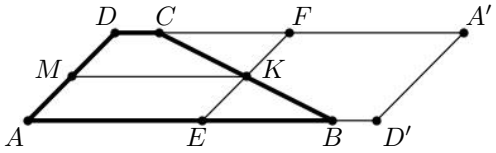


Figuur 1.4: Stelling van Pythagoras

Er zijn veel verschillende bewijzen van de Stelling van Pythagoras. Het bewijs dat we hier geven is het bewijs dat je ook in de *Elementen* van Euclides vindt. Je vindt het ook terug op de bladzijde van het oude manuscript in Figuur 1.5.

1.7.7 Figuren op de middens van de zijden

Stelling 1.7.28. Het verbindingslijnstuk van de middens der benen van een trapezium is parallel met de evenwijdige zijden, en gelijk aan de helft van de som der evenwijdige zijden.



GEGEVEN: $\square ABCD$, $DC /\!/ AB$, $AM = MD$, $CK = KB$.
TE BEWIJZEN: DC// MK// AB en $\overline{MK} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{DC})$
BEWIJS: Trek EF door K evenwijdig aan AD, dan is $\square AEFD$ een parallellogram en $\triangle KBE \cong \triangle KFC$. Daarom is $\overline{EK} + \overline{KF}$ en DC// MK// AB. Teken $\square A'CBD' \cong \square ABCD$, dan is $\square AD'A'D$ ook een parallellogram en $\overline{AB} + \overline{DC} = 2\ \overline{MK}$. □

Gevolg 1.7.29. Het verbindingslijnstuk van de middens van twee zijden van een driehoek is evenwijdig met de derde zijde, en de lengte ervan is de helft van de derde zijde.

Gevolg 1.7.30. De middens van de zijden van een vierhoek zijn de hoekpunten van een parallelogram.

Gevolg 1.7.31. De middens van de zijden van een vierhoek met onderling loodrechte diagonalen, zijn de hoekpunten van een rechthoek.

Gevolg 1.7.32. De middens van de zijden in een vierhoek met gelijke diagonalen, zijn de hoekpunten van een ruit.

1.8 Meetkundige plaatsen

Bepaling 1.8.1. Onder een *meetkundige plaats* (MP) verstaat men een figuur, waarvan alle punten een zekere eigenschap bezitten, terwijl ook alle punten welke die eigenschap bezitten tot die figuur behoren.
Anders gezegd: een meetkundige plaats is de verzameling van precies alle punten die een bepaalde eigenschap bezitten

1.8.1 Constructies

Veel van de vorige constructies kunnen we formuleren als het vinden van een meeetkundige plaats. Bekijk de volgende opgaven.

Opgave 1.8.2. Construeer de MP van punten die een gelijke afstand bezitten tot twee gegeven punten A en B.

Opgave 1.8.3. Construeer de MP van punten die een gelijke afstand bezitten tot de benen van een hoek.

Opgave 1.8.4. Construeer de MP van punten die een gelijke afstand bezitten tot twee snijdende lijnen.

Opgave 1.8.5. Construeer de MP van punten die een gelijke afstand bezitten tot twee evenwijdige lijnen.

Opgave 1.8.6. Construeer de MP van punten die een gegeven afstand bezitten tot een gegeven lijn.

Opgave 1.8.7. Construeer de MP van punten die een gegeven afstand bezitten tot een gegeven punt.

1.8.2 De cirkel

Door wat we nu weten, kunnen we de definitie van middelloodlijn (bepaling 1.1.18) vervangen door een mooiere definitie die equivalent is [16] met de vorige:

Bepaling 1.8.8. De *middelloodlijn* is de MP van punten met een vaste afstand tot twee punten A en B.

Evenzo kunnen we de definitie van de cirkel (bepaling 1.1.13) nu vervangen door een equivalente,

Bepaling 1.8.9. De *cirkel* is de MP van punten met een vaste afstand tot een vast punt M.

Gevolg 1.8.10. Uit Bepaling 1.8.8 en Bepaling 1.8.9 volgt meteen dat het middelpunt van een cirkel die door twee punten A en B gaat, op de middelloodlijk van AB ligt. Hiermee kun je eenvoudig de volgende twee stellingen afleiden.

Stelling 1.8.11. Door drie niet-collineaire[17] punten gaat één en slechts één cirkel.

[16] *equivalent* betekent gelijkwaardig, 'precies even goed'.
[17] *collineaire punten* zijn punten die op eenzelfde rechte lijn liggen

Figuur 1.5: De stelling van Pythagoras in een oud grieks manuscript.

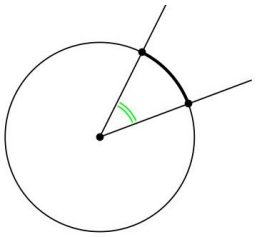
Stelling 1.8.12. Door drie collineaire punten gaat geen cirkel.

Stelling 1.8.13. Een cirkel en een rechte lijn kunnen geen drie punten gemeen hebben.
BEWIJS: Dit volgt direkt uit stelling 1.8.12. □

Stelling 1.8.14. De afstand van het middelpunt van een cirkel tot een snijlijn is kleiner dan de straal. [18]

Stelling 1.8.15. Een raaklijn in een punt op een cirkel staat loodrecht op de straal door dat punt

De middelpuntshoek.

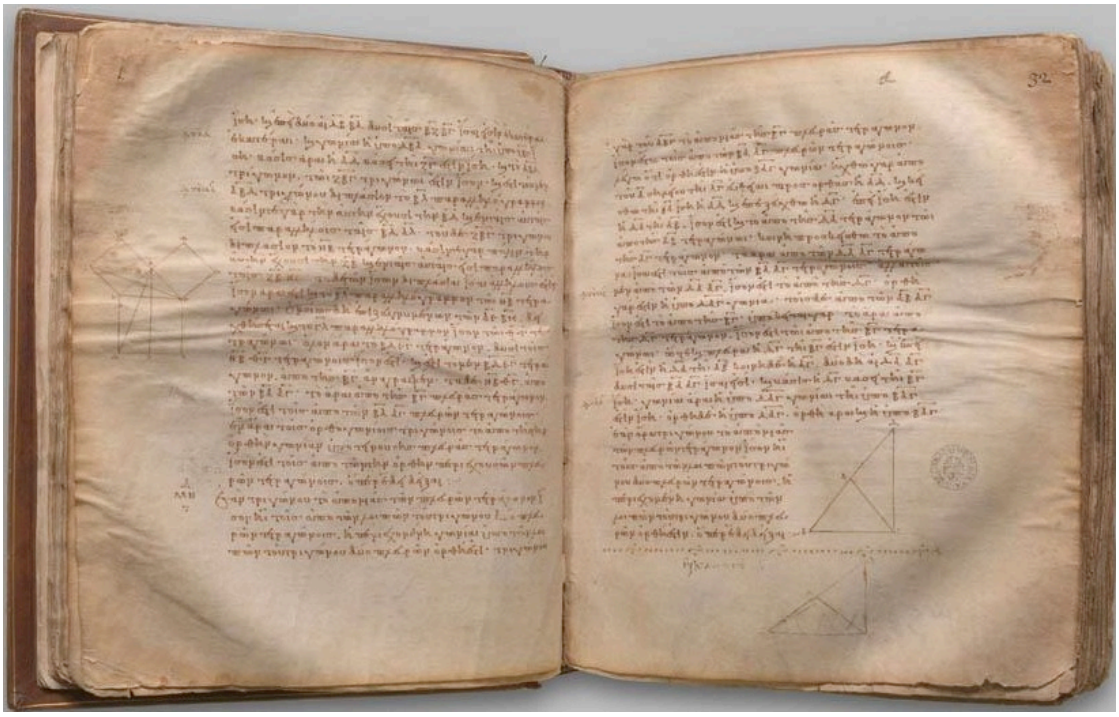


Stelling 1.8.16. Bij gelijke middelpuntshoeken van een cirkel horen gelijke bogen, en bij gelijke bogen gelijke middelpuntshoeken.

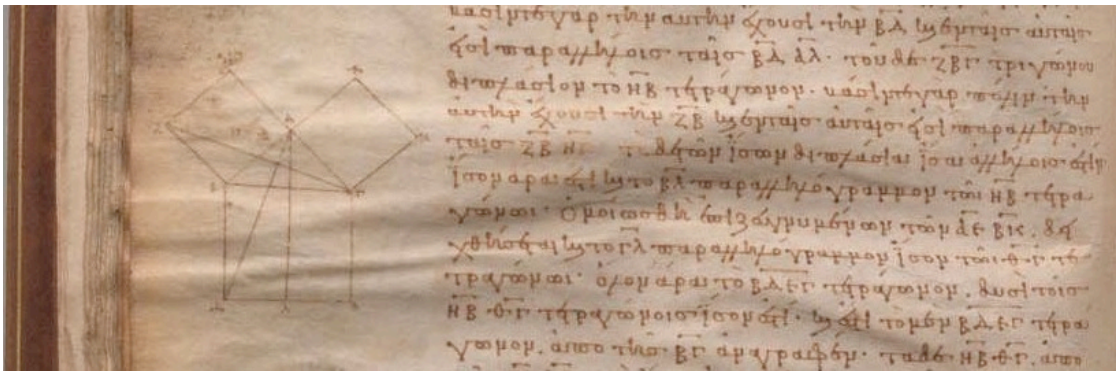
Stelling 1.8.17. Twee middelpuntshoeken verhouden zich als de bogen waarop ze staan.

Gevolg 1.8.18. Hierdoor is, voor een gegeven cirkel, de grootte van een middelpuntshoek evenredig met de lengte van de boog waarop hij staat.

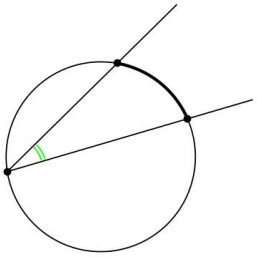
[18] Hint voor bewijs: hier kunnen we Pythagoras goed gebruiken.



Figuur 1.6: De stelling van Pythagoras in het oudste manuscript dat nog bestaat (uit 888). Het boek bevindt zich in het Bodleian museum in Oxford als “MS d’Orvile 301”. Het werd in Constantinopel geschreven door ‘Stephanus clericus’ en gekocht door Arethas uit Patrae, de latere bisschop van Caesarea in Capadocië, voor 14 numismata (gouden munten). Het handschrift van Stephanus is *miniscule*. Arethas voegde extra materiaal toe in *kleine uncialen*. Na de dood van Arethas (c.939) is het onbekend wie het manuscript hebben bezeten, tot aan de zeventiende eeuw toen het gekocht werd door de Nederlandse classicist J.P.D’Orville. Diens collectie werd uiteindelijk grotendeels aan het Bodleian Museum verkocht.

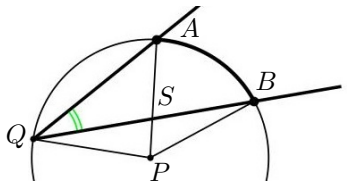


De omtrekshoek.

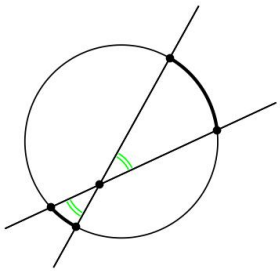


Stelling 1.8.19. Een omtrekshoek is de halve boog waarop hij staat.

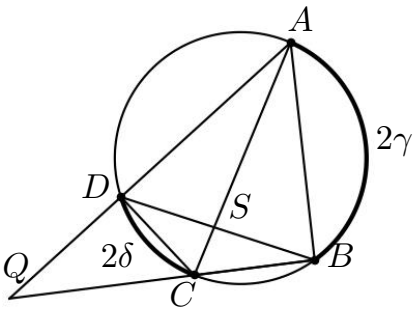
GEGEVEN: Punten A, B en Q op cirkel met middelpunt P.
TE BEWIJZEN: $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle APB$
BEWIJS: Noem $\angle AQB = \alpha$, $\angle BQP = \beta$, en
S snijpunt van AP en BQ.
$\angle QBP = \beta$ (want $\triangle QPB$ is gelijkbenig).
$\angle PAQ = \angle PQA = \alpha + \beta$ (gelijkbenige driehoek).
$\angle BSP = \angle QSA = 180^o - (\alpha + \beta) - \alpha = 180^o - 2\alpha - \beta$
(overstaande hoeken; som der hoeken in $\triangle ASQ$).
$\angle APB = 180^o - \angle QBP - \angle BSP = 2\alpha$
(som der hoeken in $\triangle BSP$). □



Gevolg 1.8.20. Vanuit een punt op een cirkel zie je iedere middellijn onder een rechte hoek. Vergelijk stelling 1.7.25.

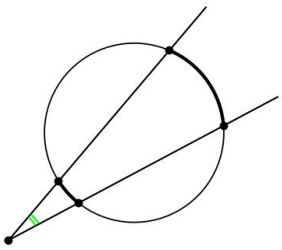


De binnenomtrekshoek.



Stelling 1.8.21. Een binnenomtrekshoek is de halve som van de bogen tussen de benen.
GEGEVEN: Punten A, B C en D op cirkel met middelpunt P;
TE BEWIJZEN: Met S het snijpunt van AC en DB geldt: $\angle ASB = \frac{1}{2}(\angle APB + \angle DPC)$
BEWIJS: Noem $\angle APB = 2\gamma$, $\angle DPC = 2\delta$, dan is $\angle ADS = \angle ADB = \gamma$
en $\angle DAS = \angle DAC = \delta$ (Stelling 1.8.19).
Nu is $\angle ASB = 180^o - \angle ASD = \angle ADS + \angle DAS$
(gestrekte hoek $\angle DSB$, en som der hoeken in $\triangle ADS$). □

De buitenomtrekshoek.



Stelling 1.8.22. Een buitenomtrekshoek is het halve verschil van de bogen tussen de benen.
GEGEVEN: Punten A, B C en D op cirkel met middelpunt P;
TE BEWIJZEN: Met Q het snijpunt van DA en CB geldt:

$$\angle AQB = \tfrac{1}{2}\left(\angle APB - \angle DPC\right)$$

BEWIJS: Zie de figuur bij Stelling 1.8.21. Noem $\angle APB = 2\gamma$, $\angle DPC = 2\delta$, dan is $\angle DQC = 360^o - \angle QCS - \angle CSD - \angle SDQ$ (som der hoeken van vierhoek $\square QSCD$).
Door het toepassen van Stelling 1.8.21 en twee maal Stelling 1.8.19 volgt
$\angle AQB = \angle DQC = 360^o - (180^o - \gamma) - (\gamma + \delta) - (180^o - \gamma) = \gamma - \delta$. □

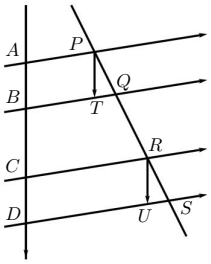
1.9 Transformaties

In de vlakke meetkunde kennen we twee vormen van transformaties:
1. verplaatsing (verschuiving, draaiing, spiegeling),
2. vermenigvuldiging.
Terwijl bij verplaatsingen alle lengtes gelijk blijven komt vermenigvuldiging neer op het vergroten of verkleinen van een figuur met een vaste factor. We zullen zien dat vaste verhoudingen tussen lijnstukken een belangrijke rol spelen in de planimetrie. Daarom wordt ook de vermenigvuldiging van figuren geïntroduceerd.

Bepaling 1.9.1. Twee figuren die door achtereenvolgende verplaatsingen en vermenigvuldigingen in elkaar overgevoerd kunnen worden heten *gelijkvormig*. Als twee figuren A en B gelijkvormig zijn, schrijven we ook wel $A \sim B$.

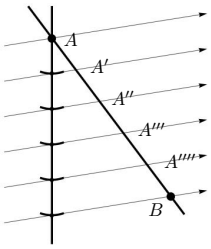
1.9.1 Verhoudingen van lijnstukken

Stelling 1.9.2. Als vier evenwijdige lijnen uit een bepaalde rechte lijn twee gelijke stukken snijden, dan snijden ze uit iedere snijdende rechte twee gelijke stukken.



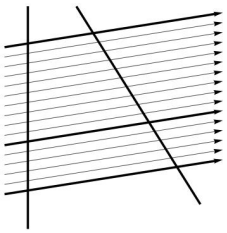
GEGEVEN: $AP /\!/ BQ /\!/ CR /\!/ DS$ en $\overline{AB} = \overline{CD}$.
TE BEWIJZEN: $\overline{PQ} = \overline{RS}$.
BEWIJS: Teken $PT /\!/ AB$ en $RU /\!/ CD$
dan $\overline{PT} = \overline{AB}$ want $\square APTB$ is parallellogram (Stelling 1.7.6),
en $\overline{CD} = \overline{RU}$ want $\square CRUD$ is parallellogram (Stelling 1.7.6).
Dan geldt dus $\triangle PTQ \cong \triangle RUS$ (HZH) en dus $\overline{PQ} = \overline{RS}$. □

Constructie 1.9.3. Verdeel een gegeven lijnstuk in vijf gelijke delen.

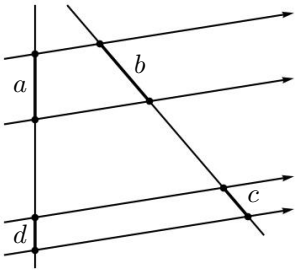


GEGEVEN: Lijstuk AB
TE CONSTRUEREN: Punten A'''', A''', A'', A' zodat $\overline{AA'} = \overline{A'A''} = \overline{A''A'''} = \overline{A'''A''''} = \overline{A''''B}$.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE:
Kun je zien hoe dat gaat (met passer en lineaal), en waarom? □

Bepaling 1.9.4. Men noemt twee lijnstukken *onderling meetbaar* als er een derde lijnstuk bestaat dat op beide een geheel aantal malen begrepen is.



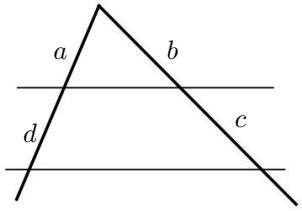
Stelling 1.9.5. Vier evenwijdige lijnen snijden uit iedere snijlijn stukken die dezelfde verhouding bezitten.



GEGEVEN: Vier evenwijdige lijnen snijden uit twee lijnen lijnstukken met lengte a, b, c en d, (zoals in de figuur hierboven),
TE BEWIJZEN: $a : d = b : c$ of $a : b = d : c$.
BEWIJS: ([19]) □

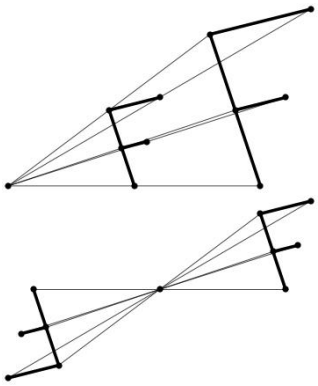
Constructie 1.9.6. Gegeven drie lijnstukken met lengte a, b en c, construeer een vierde lijnstuk met lengte x zodat $a : b = c : x$.
CONSTRUCTIE EN DISCUSSIE:
Kun je zien hoe dat gaat? □

[19] Als de lijnstukken met lengte a en b onderling meetbaar zijn, volgt het bewijs uit Stelling 1.9.2. Verhoudingen van lijnstukken die niet onderling meetbaar zijn (bestaan die wel?) kunnen we willekeurig nauwkeurig benaderen met verhoudingen die wél onderling meetbaar zijn.



Gevolg 1.9.7. Een rechte lijn evenwijdig aan de basis, deelt de benen van een driehoek in een vaste verhouding: $a : d = b : c$.

1.9.2 Vermenigvuldigen van figuren



Vermenigvuldigen van figuren (boven met factor 2, beneden met factor -1).

Bepaling 1.9.8. Onder *vermenigvuldiging* van punt P ten opzichte van punt O met de factor f verstaan we het vinden van het punt P' op de lijn OP, zódanig dat $\overline{OP'} = |f|\ \overline{OP}$, waarbij we P' kiezen aan dezelfde kant van O als P als $f > 0$, maar P' aan de andere kant van O als $f < 0$.

Bepaling 1.9.9. O heet het *vermenigvuldigingscentrum*. Onder de vermenigvuldiging van de figuur F ten opzichte van een punt O met een factor f verstaat men het bepalen van de meetkundige plaats der productpunten van F, bij vermenigvuldiging met f ten opzichte van O. De meetkundige plaats heet de *productfiguur*.

Stelling 1.9.10. De productfiguur van een rechte lijn ℓ bij vermenigvuldiging met een factor f ($f \neq 0$ en $f \neq 1$) ten opzichte van een punt O buiten de lijn ℓ, is een rechte lijn ℓ', evenwijdig met ℓ.
GEGEVEN: Een lijn ℓ en een punt O buiten lijn ℓ; een factor f.
TE BEWIJZEN: De MP van product-punten van de punten op ℓ is een rechte lijn evenwijdig met ℓ.
BEWIJS: We kiezen op ℓ een punt$P$ en bepalen het productpunt P'. Door P' trekken we een lijn ℓ' evenwijdig aan ℓ. We moeten nu laten zien:
(1) Elk punt Q op ℓ heeft een productpunt Q' op ℓ', en
(2) elk punt R' op ℓ' is productpunt van een punt R op ℓ.
Voor (1) kiezen we een willekeurig punt Q op ℓ en bepalen de snijlijn van OQ en ℓ. Dit punt noemen we Q' en we zien $\overline{OQ'} : \overline{OQ} = \overline{OP'} : \overline{OP} = |f|$ vanwege Gevolg 1.9.7. Op een dergelijke manier bewijzen we ook (2). □

Stelling 1.9.11. De productfiguur van een lijnstuk AB bij vermenigvuldiging met een factor f ($f \neq 0$ en $f \neq 1$) ten opzichte van een punt O buiten AB, is een lijnstuk $A'B'$, evenwijdig met AB, en $\overline{A'B'} = |f|\ \overline{AB}$.
BEWIJS: Volgens Stelling 1.9.10 is de produktfiguur een lijnstuk $A'B'$ met $A'B' /\!/ AB$. En verder is $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{A'O} : \overline{AO} = |f|$ vanwege Gevolg 1.9.7. □

De volgende drie stellingen zijn ook gemakkelijk te bewijzen. [20]

Stelling 1.9.12. De productfiguur van een hoek bij vermenigvuldiging met een factor f ($f \neq 0$ en $f \neq 1$) ten opzichte van een punt O is een hoek gelijk aan de eerste.

Stelling 1.9.13. De productfiguur van een cirkel is weer een cirkel.

Stelling 1.9.14. Als F' productfuguur is van F bij vermenigvuldiging met f ten opzichte van O, dan is F productfiguur is van F' bij vermenigvuldiging met $1/f$ ten opzichte van O.

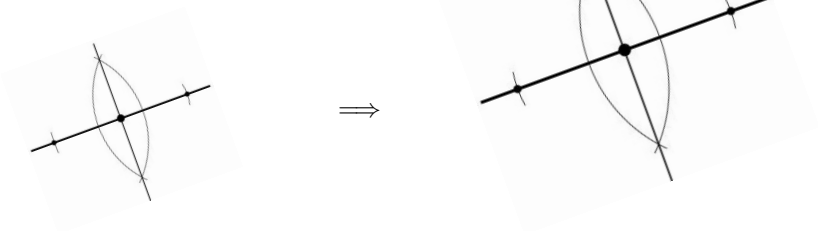
Bepaling 1.9.15. Elementen van een figuur die bij vermenigvuldiging in elkaar overgaan heten *gelijkstandig*

1.9.3 Gelijkvormigheid

We kennen nu twee vormen van meetkundige transformaties:
1. verplaatsing (verschuiving, draaiing, spiegeling),
2. vermenigvuldiging.

We noemen twee figuren die door verplaatsing in elkaar kunnen worden overgevoerd *congruent*. Twee figuren die door vermenigvuldiging in elkaar kunnen worden overgevoerd heten *gelijkstandig*.

Gelijkstandige figuren



Twee figuren die door achtereenvolgende verplaatsingen en vermenigvuldigingen in elkaar overgevoerd kunnen worden heten *gelijkvormig*. (Bepaling 1.9.1.)

Opmerking 1.9.16. Uit het voorafgaande volgt: bij twee gelijkvormige figuren zijn overeenkomstige hoeken gelijk en hebben overeenkomstige lijnstukken een vaste verhouding.

Vaak moeten we bewijzen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn. Daarvoor kunnen we vier gelijkvormigheidsgevallen herkennen.

Stelling 1.9.17 (HH). Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee hoeken gelijk hebben.
GEGEVEN: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\angle B'A'C' = \angle BAC$, $\angle A'B'C' = \angle ABC$.
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

[20] Hint Stelling 1.9.12: gebruik Stelling 1.9.10. Hint Stelling 1.9.13: pas Stelling 1.9.11 toe op de straal van de cirkel.

BEWIJS: Verplaats $\triangle A'B'C'$ zodanig dat $\angle B'A'C'$ op $\angle BAC$ valt (dat kan want beide hoeken zijn even groot). Nu zien we dat de lijnen $B'C'$ en BC evenwijdig zijn (Stelling 1.3.4). We zien nu eenvoudig dat A het vermenigvuldigingscentrum is waardoor $\triangle A'B'C'$ productfiguur is van $\triangle ABC$. □

Stelling 1.9.18 (ZHZ). Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee paar zijden een evenredigheid vormen terwijl hun ingesloten hoeken gelijk zijn.
GEGEVEN: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\angle B'A'C' = \angle BAC$, $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{A'C'} : \overline{AC}$.
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
BEWIJS: Het bewijs is analoog aan het bewijs van Stelling 1.9.17. □

Stelling 1.9.19 (ZZH). Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee paar zijden een evenredigheid vormen als de hoeken tegenover het ene paar gelijk zijn en de hoeken tegenover het andere paar van dezelfde soort zijn
GEGEVEN: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\angle B'A'C' = \angle BAC$, $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{BC}$.
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
BEWIJS: Het bewijs is analoog aan het bewijs van Stelling 1.9.17. □

Stelling 1.9.20 (ZZZ). Twee driehoeken zijn gelijkvormig als de drie zijden een aaneengeschakelde evenredigheid vormen.
GEGEVEN: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{A'C'} : \overline{AC} = \overline{B'C'} : \overline{BC}$.
TE BEWIJZEN: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
BEWIJS: Hint: Maak het productfiguur $\triangle A''B''C''$ door $\triangle ABC$ te vermenigvuldigen met vermenigvuldigingscentrum A en vermenigvuldigingsfactor $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ en laat zien dat $\triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'$. □

1.10 Bijzondere lijnstukken in de driehoek

We spreken steeds over driehoek $\triangle ABC$. De zijde tegenover $\angle A$ noemen we a, enzovoort. We geven de bisectrix van $\angle A$ aan met d_a. Evenzo d_b en d_c. We geven de hoogtelijn uit A aan met h_a. Evenzo h_b en h_c. We geven de zwaartelijn uit A aan met z_a. Evenzo z_b en z_c. We noemen de middelloodlijn van de zijde BC m_a. Evenzo m_b en m_c.

1.10.1 Concurrentie van bijzondere lijnstukken

Stelling 1.10.1. De drie deellijnen van een driehoek gaan door één punt. [21]

Gevolg 1.10.2. Het snijpunt van de deellijnen heeft gelijke afstand tot de drie zijden van de driehoek: het is het middelpunt van de "ingeschreven cirkel"'.

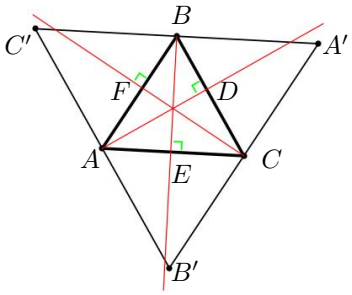
Stelling 1.10.3. De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt. [22]

Gevolg 1.10.4. Het snijpunt van de middelloodlijnen heeft gelijke afstand tot de drie hoekpunten van de driehoek: het is het middelpunt van de "omgeschreven cirkel"'.

[21] Hint voor bewijs: de deellijn is de MP van punten met gelijke afstanden tot twee lijnen.
[22] Hint voor bewijs: de middelloodlijn van een lijnstuk is de MP van punten met gelijke afstand tot de eindpunten.

Stelling 1.10.5. De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

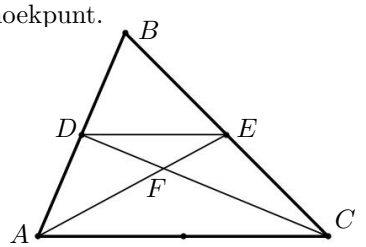
GEGEVEN: $\triangle ABC$; $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$.
TE BEWIJZEN: AD, BE en CF gaan door één punt.
BEWIJS: Teken de lijnen $A'B'$, $B'C'$ en $C'A'$, dan zijn AD, BE en CF de middelloodlijnen van $\triangle A'B'C'$, en daarom gaan ze door één punt (stelling 1.10.3). □



Bepaling 1.10.6. Het snijpunt van een hoogtelijn en de zijde waarop deze loodrecht staat heet een *voetpunt*. Het snijpunt van de hoogtelijnen wordt *hoogtepunt* van de driehoek genoemd.

Stelling 1.10.7. Twee zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1:2, waarbij het lange stuk ligt aan de kant van het hoekpunt.

GEGEVEN: $\triangle ABC$; $\overline{AD} = \overline{DE}$, $\overline{CE} = \overline{EB}$.
TE BEWIJZEN: $\overline{AF} = 2\ \overline{FE}$, $\overline{CF} = 2\ \overline{FD}$
BEWIJS: De driehoek $\triangle FED \sim \triangle FAC$ en $\overline{AC} = 2\ \overline{DE}$ (stelling 1.9.17).
De gevraagde verhoudingen volgen uit deze gelijkvormigheid. □



Stelling 1.10.8. De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.
BEWIJS: In stelling 1.10.7 zagen we dat zwaartelijn DC de zwaartelijn AE snijdt met een verhouding 2:1. Om dezelfde reden snijdt ook de zwaartelijn uit B de zwaartelijn AE snijdt met een verhouding 2:1. Ze snijden elkaar dus in hetzelfde punt. □

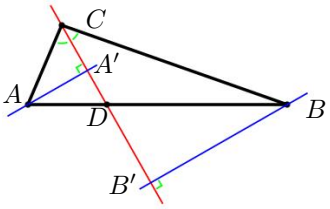
Bepaling 1.10.9. Het snijpunt van de zwaartelijnen wordt *zwaartepunt* van de driehoek genoemd.

Opmerking 1.10.10. In het algemeen vallen het zwaartepunt, het hoogtepunt, en de snijpunten van de bisectrices en de middelloodlijnen geen van allen samen. Bij een gelijkzijdige driehoek vallen ze wèl allen samen; dan zijn dus ook de in- en de omgeschreven cirkel concentrisch.

1.10.2 Nog enkele driehoekstellingen

Stelling 1.10.11 (binnen-bisectrix-stelling). Een binnenbisectrix van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in twee stukken die zich verhouden als de aangrenzende zijden.

GEGEVEN: $\triangle ABC$.
TE BEWIJZEN: $\overline{AC}\ : \overline{BC} = \overline{AD}\ : \overline{BD}$
BEWIJS:
Uit $\triangle AA'C \sim \triangle BB'C$ volgt $\overline{AC}\ :\ \overline{BC} = \overline{AA'}\ :\ \overline{BB'}$.
Uit $\triangle AA'D \sim \triangle BB'D$ volgt $\overline{AA'}\ :\ \overline{BB'} = \overline{AD}\ :\ \overline{BD}$.
Gecombineerd geeft dit $\overline{AC}\ :\ \overline{BC} = \overline{AA'}\ :\ \overline{BB'} = \overline{AD}\ :\ \overline{BD}$. □

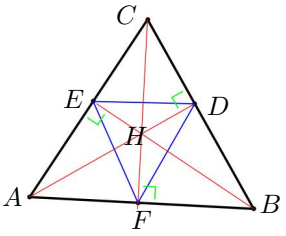


Stelling 1.10.12 (buiten-bisectrix-stelling). Een buitenbisectrix van een driehoek snijdt uit de overstaande zijde in twee stukken die zich verhouden als de aangrenzende zijden. [23]

[23] Hint: het bewijs loopt analoog aan dat voor de binnen-bisectrix: je moet uit de hoekpunten van de basis loodlijnen op de buitenbisectrix trekken en dan gelijkvormige driehoeken vinden.

Stelling 1.10.13. In een driehoek zijn de hoogtelijnen omgekeerd evenredig met de zijden waarop ze staan. Dwz het product van de hoogtelijn en de zijde waarop deze staat is constant (dwz onafhankelijk van de keuse van de hoogtelijn). [24]

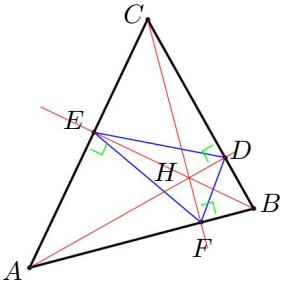
Stelling 1.10.14. Twee hoogtelijnen in een driehoek verdelen elkaar in evenredige stukken.



GEGEVEN: $\triangle ABC$; $AD \perp BC$, $BE \perp AC$
en H is snijpunt van EB en AD.
TE BEWIJZEN: $\overline{HE} \ : \ \overline{HD} = \overline{HA} \ : \ \overline{HB}$.
BEWIJS: $\triangle HEA \sim \triangle HDB$ vanwege stelling 1.9.17. □

Bepaling 1.10.15. De *voetpuntsdriehoek* (van een driehoek) is de driehoek die de drie voetpunten als hoekpunten heeft. De zijden van de voetpuntsdriehoek heten *voetpuntslijn(stuk)*

Stelling 1.10.16. Een hoogtelijn in een driehoek is bisectrix van de voetpuntsdriehoek.



GEGEVEN: $\triangle ABC$; $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$.
TE BEWIJZEN: $\angle FEB = \angle BED$.
BEWIJS:
Uit $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ volgt $CD \ : \ AC = CE \ : \ BC$.
Uit $\triangle EDC \sim \triangle ABC$ volgt $ED \ : \ BA = CE \ : \ BC = CD \ : \ AC$.
Zodat $\angle CED = \angle CAB$. Door ED te vervangen door EF laat je op dezelfde manier zien $\angle AEF = \angle CAB$. Omdat $BE \perp AC$ volgt dus ook $\angle BEF = \angle BED$. □

1.10.3 Nogmaals de stelling van Pythagoras

Bepaling 1.10.17. De *projectie* van een punt op een lijn is het snijpunt van de lijn en de loodlijn van het punt op de lijn. De projectie van een lijnstuk op een lijn is het lijnstuk dat gevormd wordt door de projectie van de eindpunten.

We passen dit toe op een rechthoekige driehoek (zie Figuur 1.7). Hier is: $CD \perp AB$, BD is de projectie van BC op AB, ofwel: p is projectie van a op c en q is projectie van b op c.

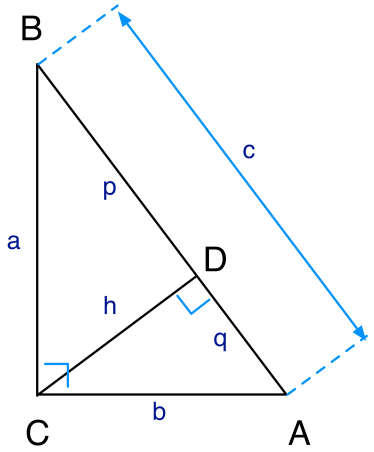
Stelling 1.10.18 (Stelling van Pythagoras). In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekzijden gelijk aan het kwadraat van de hypothenusa.
GEGEVEN: $\triangle ABC$ met $BC \perp CA$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$. $\overline{AD} = q$, $\overline{BD} = p$, $\overline{CD} = h$
TE BEWIJZEN: $a^2 + b^2 = c^2$
BEWIJS: We zien hier drie driehoeken. Deze zijn met elkaar gelijkvormig:

$$\triangle CDB \quad \sim \quad \triangle ADC \quad \sim \quad \triangle ACB \, ,$$

want beide hoeken $\angle DBC$ en $\angle DCA$ zijn het complement van $\angle A$.
Uit deze gelijkvormigheid volgt:

$$\begin{array}{ccccc} CD : AD : AC & = & DB : DC : CB & = & BC : CA : BA \, , \\ h : q : b & = & p : h : a & = & a : b : c \, , \end{array}$$

[24] Hint: het bewijs is eenvoudig wanneer je aan stelling 1.7.23 denkt.



Figuur 1.7: Lijnstukken in een rechthoekige driehoek

Hieruit volgt onder andere

$$\begin{array}{lccc} (i) & h:q=p:h & \text{of} & h^2=pq\ , \\ (ii) & h:a=b:c & \text{of} & ab=hc\ , \\ (iii) & p:a=a:c & \text{of} & a^2=pc\ , \\ (iv) & q:b=b:c & \text{of} & b^2=qc\ . \end{array} \tag{1.1}$$

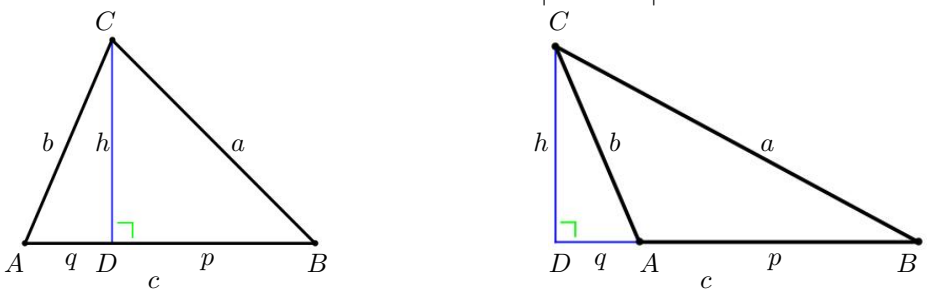
Als we de resultaten (iii) en (iv) combineren krijgen we

$$a^2+b^2=(p+q)c=c^2\ .$$

□

1.11 Nog enkele beroemde stellingen

Stelling 1.11.1 (Projectie-stelling).
De lengte van de projectie AD van AC op AB is $q=\left|\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right|$.



Gegeven: $\triangle ABC$ met $CD\perp AB$, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$. $\overline{AD}=q$, $\overline{BD}=p$, $\overline{CD}=h$
Te bewijzen: $b^2+c^2=a^2+2cq$.
Bewijs: Twee maal Pythagoras toepassen levert

$$b^2-a^2=q^2-p^2=q^2-(c\mp q)^2=\pm 2cq-c^2.$$

Zodat $\pm 2cq=c^2+b^2-a^2=q^2-p^2$, waaruit de stelling direct volgt. □

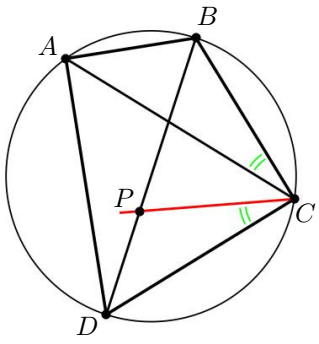
Stelling 1.11.2 (Stelling van Heron). De oppervlakte van een driehoek wordt gegeven door $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, waarin $s = \frac{a+b+c}{2}$.
GEGEVEN: $\triangle ABC$
TE BEWIJZEN: $\overline{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,
BEWIJS: In figuur 1.7 is het kwadraat van de oppervlakte van de driehoek $\overline{\triangle ABC}^2 = (hc/2)^2$, Verder zien we met Pythagoras en de projectie-stelling $h^2 = b^2 - q^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2$, zodat

$$\overline{\triangle ABC}^{\,2} = \left(b^2 - \left(\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2\right)(c/2)^2 = \tfrac{1}{16}\left(4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right) =$$
$$= \tfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = s(s-c)(s-b)(s-a) \qquad \square$$

Stelling 1.11.3 (Stelling van Ptolemaeus).
Zij gegeven een koordenvierhoek $ABCD$, dan geldt

$$\overline{AC} \times \overline{BD} \;=\; \overline{AB} \times \overline{CD} \;+\; \overline{BC} \times \overline{AD}\,.$$

BEWIJS:
Kies op de diagonaal BD een punt P, zodat $\angle ACB = \angle PCD$.
Omdat de $\angle BAC$ en $\angle BDC$ op dezelfde boog staan, zijn ze aan elkaar gelijk.
De driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DPC$ zijn dus gelijkvormig, waaruit volgt, dat $\overline{CD} : \overline{PD} = \overline{CA} : \overline{BA}$, of $\overline{AB}.\overline{CD} = \overline{AC}.\overline{PD}$.
De hoeken BCP en ACD zijn eveneens gelijk, zodat de driehoeken $\triangle BCP$ en $\triangle ACD$ eveneens gelijkvormig zijn, waaruit volgt $\overline{BC} : \overline{BP} = \overline{AC} : \overline{AD}$, of $\overline{BC}.\overline{AD} = \overline{AC}.\overline{BP}$.
Tellen we beide resultaten op, dan vinden we
$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} = \overline{AC}.\overline{PD} + \overline{AC}.\overline{BP} = \overline{AC}.(\overline{BP} + \overline{PD}) = \overline{AC}.\overline{BD}$. $\square$



1.11.1 De machtstelling

Bepaling 1.11.4. Als een cirkel gegeven is met middelpunt M en straal r en een punt P zodat $PM = a$, dan verstaan we onder de macht van het punt P ten opzichte van die cirkel het getal $a^2 - r^2$

Gevolg 1.11.5. De macht van een punt buiten de cirkel is positief, van een punt binnen de cirkel is negatief. De macht neemt monotoon toe met de afstand tot het middelpunt.

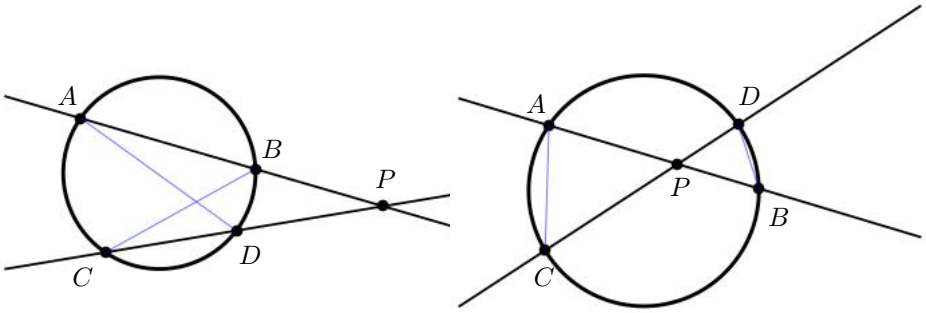
Bepaling 1.11.6. De meetkundige plaats van punten die gelijke macht hebben ten opzichte van twee niet concentrische cirkels heet de machtlijn.

Stelling 1.11.7. De MP der punten die gelijke machten hebben t.o.v. twee niet-concentrische cirkels is een rechte lijn die loodrecht staat op de verbindingslijn der middelpunten.
GEGEVEN: Twee cirkels met middelpunten M_1 en M_2 en stralen resp. r_1 en r_2. Een willekeurig punt S en de projectie P van S op M_1M_2.
TE BEWIJZEN: S heeft gelijke machten t.o.v. de twee cirkels precies dan als P gelijke machten heeft t.o.v. de twee cirkels.
BEWIJS: Door Pythagoras twee maal toe te passen zien we $\overline{SM_1}^2 = \overline{PM_1}^2 + \overline{PS}^2$ en $\overline{SM_2}^2 = \overline{PM_2}^2 + \overline{PS}^2$. Hieruit volgt dat $\overline{SM_1}^2 - r_1^2 = \overline{SM_2}^2 - r_2^2$ precies waar is als $\overline{PM_1}^2 - r_1^2 = \overline{PM_2}^2 - r_2^2$. $\square$

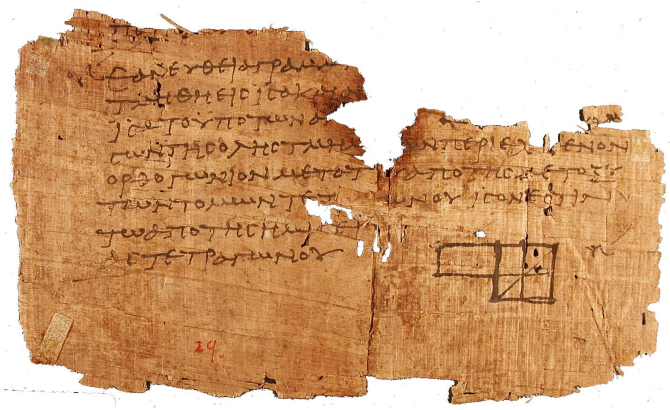
Gevolg 1.11.8. De machtlijn van twee elkaar snijdende cirkels is de rechte lijn die door de gemeenschappelijke punten gaat. [25]

Stelling 1.11.9 (Machtstelling). Als vier punten A, B, C, D op een cirkel liggen en het snijpint van AB en CD is P, dan geldt

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}\,.$$



GEGEVEN: A, B, C, D op cirkel$M$; AB en CD snijden elkaar in P.
TE BEWIJZEN: $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$.
BEWIJS: Voor het punt buiten de cirkel geldt $\triangle DPA \sim \triangle BPC$ omdat $\angle P = \angle P$ en $\angle BAD = \angle BCD$ (stelling 1.8.19). Vanwege de gelijkvormigheid geldt $\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$ en daarom ook qed.
Voor het punt binnen de cirkel geldt $\triangle DPB \sim \triangle APC$ omdat $\angle P = \angle P$ en $\angle BDC = \angle BAC$ (stelling 1.8.19). Vanwege de gelijkvormigheid geldt $\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$ en daarom ook qed. □



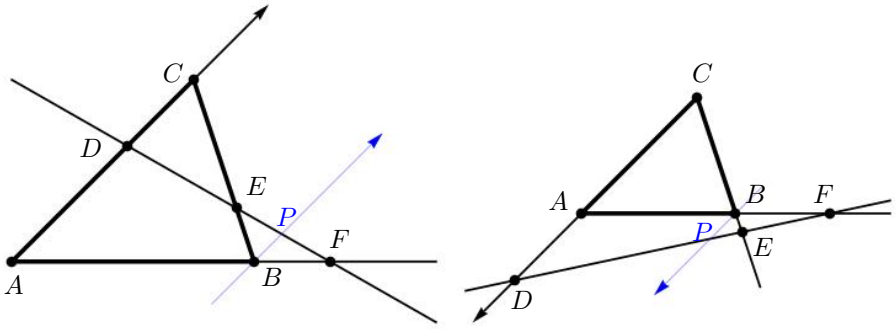
Figuur 1.8: Propositie V uit boek II van Euclides' Elementen, op een papyrusfragment uit de eerste eeuw na Christus.

[25] In de snijpunten is voor beide cirkels de macht 0.

1.11.2 De stellingen van Menelaos en De Ceva

Stelling 1.11.10 (**Stelling van Menelaos).** Zij gegeven een driehoek $\triangle ABC$ die gesneden wordt door een lijn waarop de punten D, E, F liggen als in de figuur, dan geldt

$$\overline{AD} \times \overline{CE} \times \overline{BF} = \overline{DC} \times \overline{EB} \times \overline{AF}\,.$$



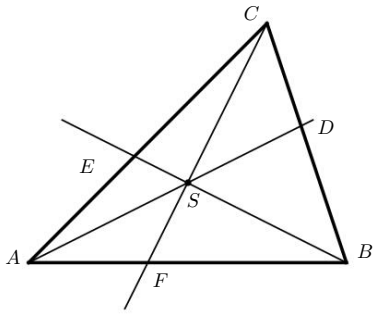
Bewijs:Trek $BP // AC$ daan volgt uit de gelijkvormigheid van driehoeken:

$$\frac{\overline{AD} \times \overline{CE} \times \overline{BF}}{\overline{DC} \times \overline{EB} \times \overline{AF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{AD}} = 1$$

□

Stelling 1.11.11 (**Stelling van De Ceva).** Zij gegeven een driehoek $\triangle ABC$ en drie concurrente lijnen door de hoekpunten, als in de figuur, dan geldt

$$\overline{AE} \times \overline{CD} \times \overline{BF} = \overline{CE} \times \overline{DB} \times \overline{AF}\,.$$



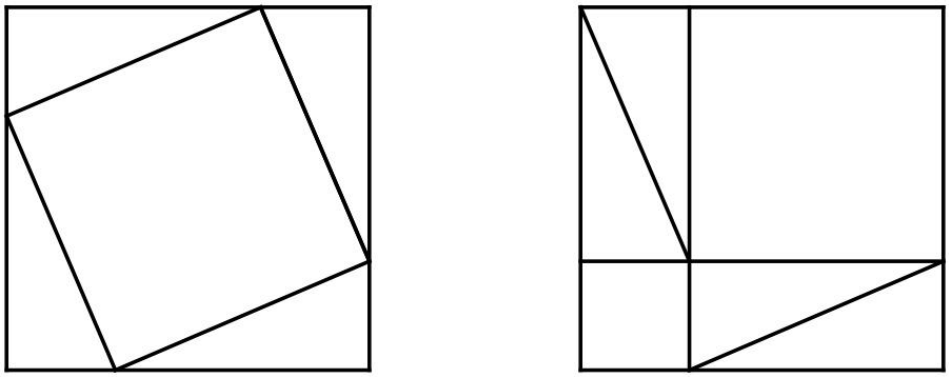
Bewijs:Pas de stelling van Menelaos twee maal toe: op $\triangle AFC$ met EB als transversaal, en op $\triangle BFC$ met DA als transversaal. We zien dan

$$\frac{\overline{AE} \times \overline{CS} \times \overline{FB}}{\overline{CE} \times \overline{SF} \times \overline{AB}} = 1 = \frac{\overline{BD} \times \overline{CS} \times \overline{AF}}{\overline{CD} \times \overline{SF} \times \overline{AB}}$$

□

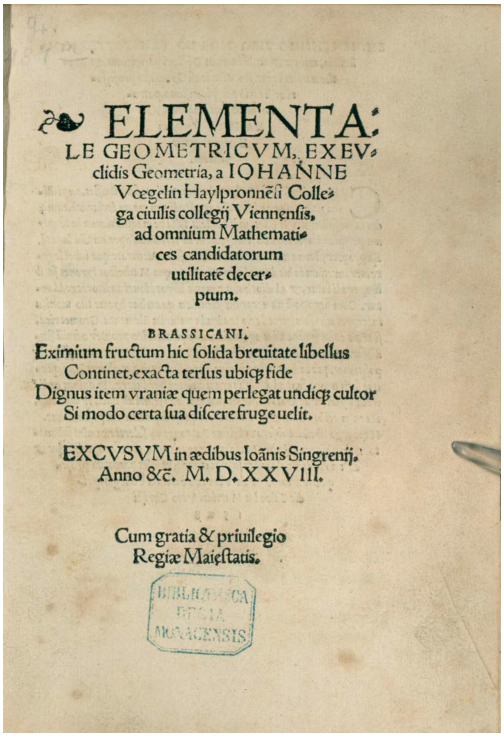
1.12 Een heel eenvoudig bewijs voor Pythagoras

Hier volgt een bewijs van de stelling van Pythagoras zonder woorden.



Hoewel je op deze manier het bewijs van de Stelling van Pythagoras 'ziet', is het eigenlijk nog helemaal geen wiskundig 'bewijs' omdat het niet duidelijk is wat je precies voor waar *aanneemt* en wat *daaruit volgt*.

Het is best wel mogelijk om met het idee van deze plaatjes, en met behulp van de stellingen die we al bewezen hebben, een goed nieuw bewijs voor de stelling van Pythagoras op te schrijven, maar dat vraagt een beetje werk.



ELEMENTA:
LE GEOMETRICVM, EXEV-
clidis Geometria, a IOHANNE
Vœgelin Haylpronnẽſi Colle-
ga ciuilis collegij Viennenſis,
ad omnium Mathemati-
ces candidatorum
utilitatẽ decer-
ptum.

BRASSICANI.
Eximium fructum hic ſolida breuitate libellus
Continet, exacta terſus ubiq; fide
Dignus item vraniæ quem perlegat undiq; cultor
Si modo certa ſua diſcere fruge uelit.

EXCVSVM in ædibus Ioānis Singrenij.
Anno &c. M. D. XXVIII.

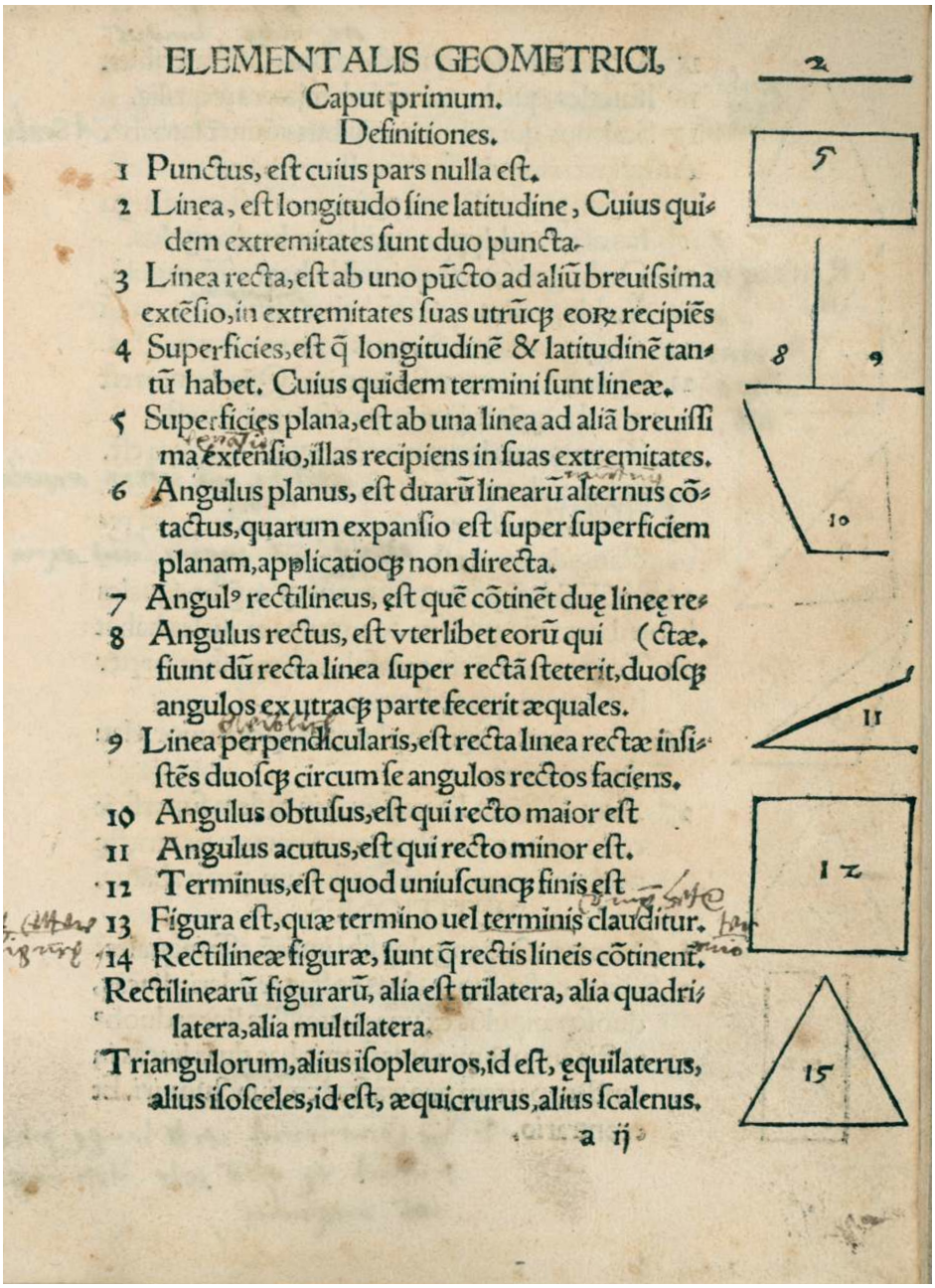
Cum gratia & priuilegio
Regiæ Maieſtatis.

BIBLIOTECA
PUBLICA
MONACENSIS

1.13 ** Het begin van Euclides' Elementen **

We geven hier de Griekse tekst en de vertaling van de eerste pagina's van Euclides' elementen. Op die eerste pagina's vind je definities, postulaten en 'algemene inzichten'.

In Europa werd Euclides' werk vooral bekend door de Latijnse vertalingen die in de zestiende eeuw verschenen. We laten hier een paar eerste pagina's van zo'n vertaling (uit 1528) zien. Ook daarbij zie je de vertaling. Als je de Griekse en de Latijnse versie vergelijkt, zie je dus dat zo'n vertaling ook min-of-meer een bewerking was.



ELEMENTALIS GEOMETRICI.

Caput primum.

Definitiones.

1 Punctus, eſt cuius pars nulla eſt.
2 Linea, eſt longitudo ſine latitudine, Cuius quidem extremitates ſunt duo puncta.
3 Linea recta, eſt ab uno punćto ad aliū breuiſsima extēſio, in extremitates ſuas utrūcꝫ eorꝝ recipiēs
4 Superficies, eſt q̄ longitudinē & latitudinē tantū habet. Cuius quidem termini ſunt lineæ.
5 Superficies plana, eſt ab una linea ad aliā breuiſſima extenſio, illas recipiens in ſuas extremitates.
6 Angulus planus, eſt duarū linearū alternus cōtactus, quarum expanſio eſt ſuper ſuperficiem planam, applicatioꝫ non directa.
7 Angulꝰ rectilineus, eſt quē cōtinēt duę lineę re-
8 Angulus rectus, eſt vterlibet eorū qui (ctæ. fiunt dū recta linea ſuper rectā ſteterit, duoſcꝫ angulos exutracꝫ parte fecerit æquales.
9 Linea perpendicularis, eſt recta linea rectæ inſiſtēs duoſcꝫ circum ſe angulos rectos faciens.
10 Angulus obtuſus, eſt qui recto maior eſt
11 Angulus acutus, eſt qui recto minor eſt.
12 Terminus, eſt quod uniuſcunꝫ finis eſt
13 Figura eſt, quæ termino uel terminis clauditur.
14 Rectilineæ figuræ, ſunt q̄ rectis lineis cōtinent.

Rectilinearū figurarū, alia eſt trilatera, alia quadrilatera, alia multilatera.

Triangulorum, alius iſopleuros, id eſt, æquilaterus, alius iſoſceles, id eſt, æquicrurus, alius ſcalenus.

a ij

Euclides en de nederlandse vertaling

Ὅροι

1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
5. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
6. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

Definities

1. Een punt is wat geen deel heeft.
2. Een lijn is een breedteloze lengte.
3. De uiteinden van een lijn zijn punten.
4. Een rechte lijn is een lijn die gelijk ligt met de punten erop
5. Een vlak is wat alleen lengte en breedte heeft.
6. De uiteinden van een vlak zijn lijnen.
7. een plat vlak is een vlak dat gelijk ligt met de punten erop.
8. Een vlakke hoek is de helling tot elkaar van twee lijnen in een plat vlak, die elkaar ontmoeten en die niet op één rechte liggen.
9. Wanneer de lijnen die de hoek omvatten rechte lijnen zijn, heet de hoek rechtlijnig.

Definities in de latijnse versie

1: Een punt is wat geen deel heeft.
2: Een lijn is een lengte zonder breedte. De uiteinden ervan zijn punten.
3: Een rechte lijn is van een punt naar een ander de kortste uitstrekking [afstand] en bevat elk van beide punten in zijn uiteinden.
4: Een oppervlak is wat lengte en breedte heeft. De uiterste grens ervan zijn lijnen.
5: Een plat oppervlak is de kortste uitstrekking tussen twee lijnen welke ze in haar randen bevat.
6: Een vlakke hoek is het wederkerig treffen van twee lijnen, waarvan de uitbreiding daarenboven een plat oppervlak is en de de aansluiting niet recht.
7: Een rechtlijnige hoek is een die bestaat uit twee rechte lijnen.
8: Een rechte hoek is welk-van-beide-je-maar-wil van die hoeken die ontstaan wanneer een rechte lijn op een andere staat en [daarbij] de twee hoeken aan beide zijden gelijk heeft gemaakt.
9: Een loodlijn is een rechte lijn die op een [andere] rechte staand, daarbij om zich heen twee rechte hoeken maakt.
10: Een stompe hoek is groter dan een rechte [hoek].
11: Een scherpe hoek is kleiner dan een rechte [hoek].
12: Een uiteinde is wat ergens het einde van is.
13: Een figuur is wat door een of meer uiteinden wordt afgesloten.
14: Een rechtlijnige figuur is [een figuur] dat uit rechte lijnen bestaat. Rechtlijnige figuren zijn onder andere: driehoeken, vierhoeken en veelhoeken.
Driehoeken zijn òf gelijkzijdig, als ze de zijden gelijk hebben, òf gelijkbenig ,als ze gelijke benen hebben, òf *scaleen*.

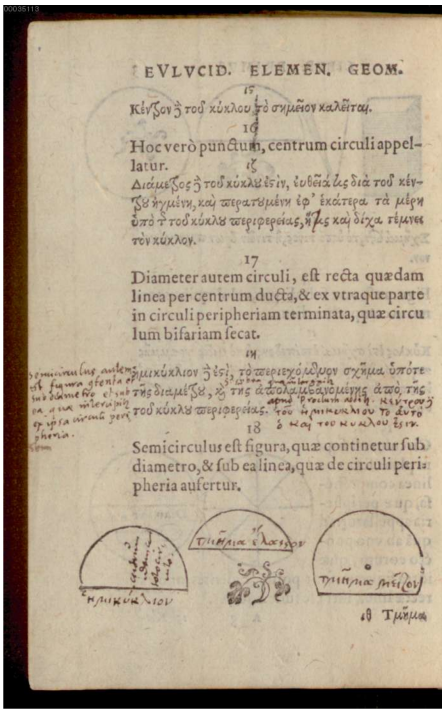
10. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.
12. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.
13. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.
14. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.
15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
16. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.
17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.
18. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὅ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.
19. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

10. Wanneer een rechte, op een rechte staande, de aan elkaar grenzende hoeken aan elkaar gelijk maakt, is elk der gelijke hoeken recht en de opstaande lijn heet de loodlijn op die waarop ze staat.
11. Een stompe hoek is groter dan een rechte [hoek].
12. Een scherpe hoek is kleiner dan een rechte [hoek].
13. Een rand is wat het uiterste is.
14. Een figuur is wat door een rand of door randen bevat wordt.
15. Een cirkel is een vlakke figuur, omvat door één lijn (die de omtrek genoemd wordt), zodanig dat alle rechten die van één der binnen deze figuur gelegen punten tot deze lijn (d.w.z. naar de omtrek van decirkel) neerdalen, gelijk zijn.
16. En dat [éne] punt wordt het middelpunt genoemd.
17. Een middellijn van de cirkel is een rechte door het middelpunt en is aan beide zijden door de omtrek van de cirkel begrensd, en zo een rechte lijn deelt de cirkel ook in tweeën.
18. Een halve cirkel is de figuur begrensd door de middellijn en de omtrek die door die [rechte] wordt afgesneden. Het middelpunt van de halve cirkel is dezelfde als die van de cirkel.
19. rechtlijnige figuren worden omvat door rechte lijnen; driehoekige door drie, vierhoekige door vier, en veelhoekige door méér dan vier rechten.

Hiernaast een paar bladzijden uit een tweetalige uitgave van de Elementen, uit 1564. *Euclides: Euclidis Elementorum libri XV, Graece et Latine ..., Coloniae, 1564* [Bayerischen Staatsbibliothek VD16 E 4146]

20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.
21. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.
22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.
23. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπι- πέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

20. Van de driehoekige figuren is de gelijkzijdige driehoek die welke drie gelijke zijden heeft; de gelijkbenige degene die slechts twee zijden gelijk heeft en een *scalene* driehoek eentje met drie ongelijke zijden.
21. Verder is van de driehoekige figuren de rechthoekige driehoek degene die een rechtehoek heeft, een stomphoekige [driehoek] die een stompe hoek heeft, en een scherphoekige [driehoek] degene die drie scherpe hoeken heeft.
22. Van de vierhoekige figuren is het *vierkant* een die gelijke zijden heeft en rechte hoeken, een *rechthoek* heeft rechte hoeken maar geen gelijke zijden; de *ruit* heeft gelijke zijden maar geen rechte hoek; een *parallellogram* heeft tegenover elkaar liggende zijden en hoeken gelijk, maar is niet gelijkzijdig of rechthoekig; de overige vierhoeken worden *trapezia* genoemd.
23. Parallel zijn lijnen die in hetzelfde platte vlak gelegen en naar weerszijden tot in het oneindige verlengd, naar geen van beide zijden elkaar ontmoeten.


EVCLVCID. ELEMEN. GEOM.

Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

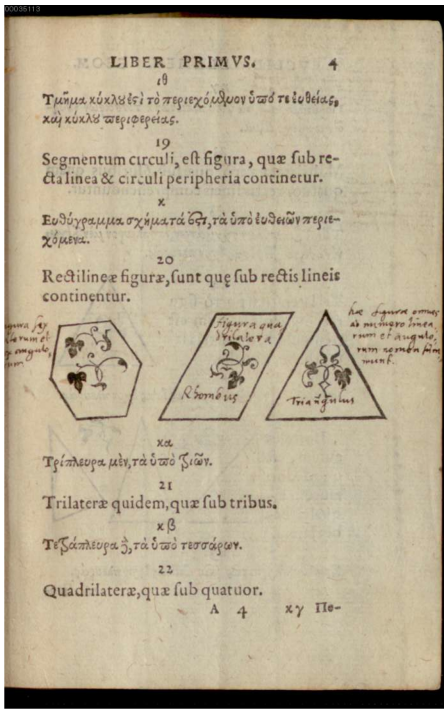
Hoc verò punctum, centrum circuli appellatur.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Diameter autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. τὸ δὲ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτὸ ἔστι καὶ τοῦ κύκλου.

Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.


LIBER PRIMVS. 4

Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

Segmentum circuli, est figura, quæ sub recta linea & circuli peripheria continetur.

Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Rectilineæ figuræ, sunt quę sub rectis lineis continentur.

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

Τετράπλευρα δέ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

Αἰτήματα

1. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐ- θείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γρά- φεσθαι.
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπί- πτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Axioma's

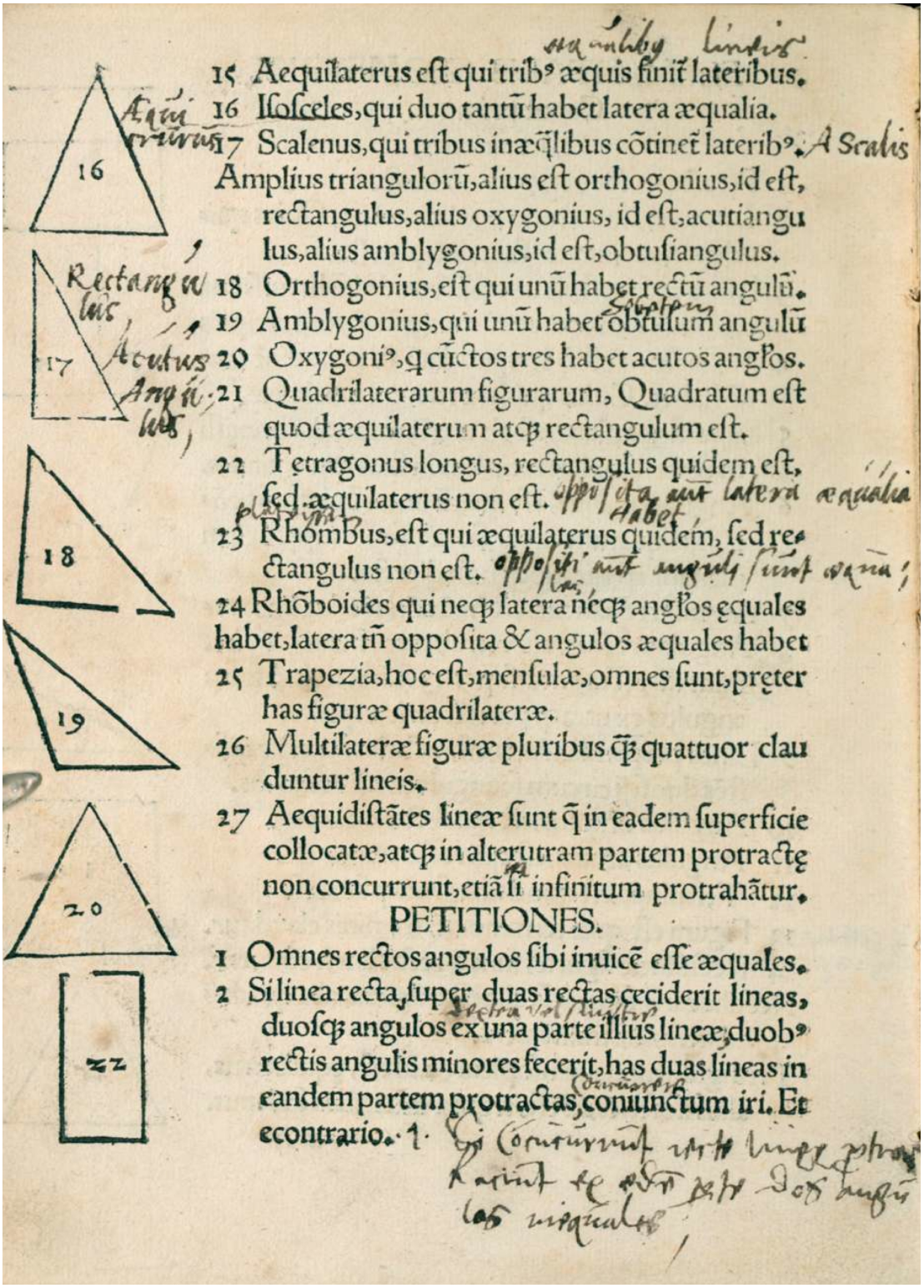
1. Laat geëist worden van elk punt naar elk punt een rechte te trekken.
2. En een beëindigde rechte samenhangend in rechte lijn te verlengen.
3. En dat met elk middelpunt en elke afstand een cirkel beschreven wordt.
4. En dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn.
5. En dat, als een rechte die twee rechten treft, de binnenhoeken an dezelfde kant kleiner dan twee rechte hoeken maakt, de twee rechten, tot in het oneindige verlengd, elkaar ontmoeten aan de kant waar de hoeken kleiner zijn dan twee rechte hoeken.

Vervolg van de latijnse versie

15: Een gelijkzijdige [driehoek] wordt begrensd door drie gelijke zijden.
16: Een gelijkbenige [driehoek] is een [driehoek die] slechts twee zijden gelijk heeft.
17: Een scalene driehoek is [er een die] drie ongelijke zijden heeft. Verder kunnen driehoeken zijn: rechthoekig als ze een rechte hoek hebben, of scherphoekig: als ze [slechts] scherpe hoeken hebben, of stomphoekig, als ze een stompe hoek hebben.
18: Een rechthoekige [driehoek] is [eer een die] een rechte hoek heeft.
19: Een stomphoekige [driehoek] is [een die een] stompe hoek heeft.
20: Een scherphoekige die alle drie de hoeken scherp heeft.
21: Van de vierhoekige figuren is het vierkant wat gelijke zijden en een rechte hoek heeft.
22. Een rechthoek heeft rechte hoeken en geen gelijke zijden.
23. Een ruit heeft gelijke zijden maar is niet rechthoekig.
24. Een parallellogram heeft noch de zijden gelijk, noch gelijke hoeken, maar toch zijn overliggende zijden en hoeken gelijk.
25. Een trapezium, of tafeltje, zijn vierhoekige behalve de bovenstaande.
26. Veelhoeken worden afgesloten door méér dan vier lijnen.
27. Evenwijdige lijnen zijn[lijnen] die in hetzelfde vlak liggen en, naar beide zijden verlengd, elkaar niet snijden, ook als ze tot in het oneindige verlengd worden.

Axioma's

1: alle rechte hoeken zijn aan elkaar gelijk.
2: Als een rechte lijn twee rechte lijnen snijdt die, aan een kant van die lijn, hoeken maakt die kleiner zijn dan twee rechte hoeken, dan zullen die twee lijnen –als ze aan die kant worden doorgetrokken– elkaar snijden. En anders niet.

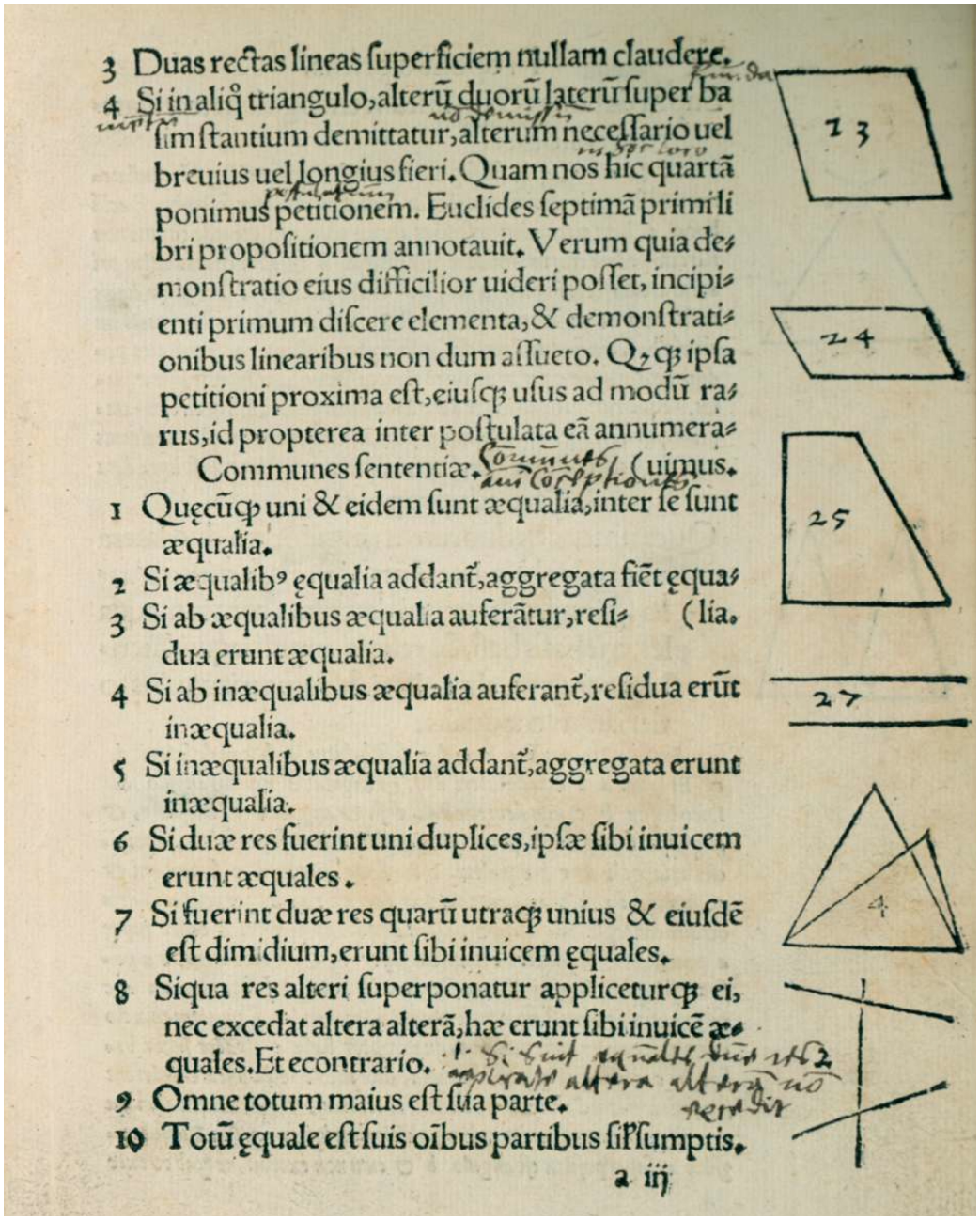


15 Aequilaterus eſt qui trib⁹ æquis finit lateribus.
16 Iſoſceles, qui duo tantū habet latera æqualia.
17 Scalenus, qui tribus inæqlibus cōtinet lateri b⁹.
Amplius triangulorū, alius eſt orthogonius, id eſt, rectangulus, alius oxygonius, id eſt, acutiangulus, alius amblygonius, id eſt, obtuſiangulus.
18 Orthogonius, eſt qui unū habet rectū angulū.
19 Amblygonius, qui unū habet obtuſum angulū
20 Oxygoni⁹, q cūctos tres habet acutos anglos.
21 Quadrilaterarum figurarum, Quadratum eſt quod æquilaterum atq; rectangulum eſt.
22 Tetragonus longus, rectangulus quidem eſt, ſed æquilaterus non eſt.
23 Rhombus, eſt qui æquilaterus quidem, ſed rectangulus non eſt.
24 Rhōboides qui neq; latera neq; anglos equales habet, latera tñ oppoſita & angulos æquales habet
25 Trapezia, hoc eſt, menſulæ, omnes ſunt, preter has figuræ quadrilateræ.
26 Multilateræ figuræ pluribus q̄ quattuor clauduntur lineis.
27 Aequidiſtātes lineæ ſunt q̄ in eadem ſuperficie collocatæ, atq; in alterutram partem protracte non concurrunt, etiā ſi infinitum protrahātur.

PETITIONES.

1 Omnes rectos angulos ſibi inuicē eſſe æquales.
2 Si linea recta, ſuper duas rectas ceciderit lineas, duoſq; angulos ex una parte illius lineæ, duob⁹ rectis angulis minores fecerit, has duas lineas in eandem partem protractas, coniunctum iri. Et econtrario.

3: Twee rechte lijnen sluiten geen oppervlak in.
4: Als in enige driehoek één van de twee zijden die op de basis staan, wordt neergelaten [d.w.z. scharniert om een hoekpunt], wordt de andere noodzakelijkerwijs óf korter óf langer.
Wat we hier als vierde eis stellen tekent Euclides in de zevende propositie van zijn eerste boek aan. Maar omdat het bewijs daarvan vrij moeilijk doorzien kan worden door iemand die voor het eerst begint de elementen te leren en nog niet gewend is aan meetkundige bewijsvoeringen, en omdat hetzelve dicht bij een vereiste ligt, hebben wij het om die reden aan het getal der postulaten toegevoegd.



3 Duas rectas lineas ſuperficiem nullam claudere.
4 Si in aliq̃ triangulo, alterũ duorũ laterũ ſuper baſim ſtantium demittatur, alterum neceſſario uel breuius uel longius fieri. Quam nos hic quartã ponimus petitionem. Euclides ſeptimã primi libri propoſitionem annotauit. Verum quia demonſtratio eius difficilior uideri poſſet, incipienti primum diſcere elementa, & demonſtrationibus linearibus non dum aſſueto. Q, cp̃ ipſa petitioni proxima eſt, eiuſcp̃ uſus ad modũ rarus, id propterea inter poſtulata eã annumeramus.

Communes ſententiæ.

1 Quęcũcp uni & eidem ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia.
2 Si æqualib⁹ ęqualia addant̃, aggregata fiẽt ęqualia.
3 Si ab æqualibus æqualia auferãtur, reſidua erunt æqualia.
4 Si ab inæqualibus æqualia auferant̃, reſidua erũt inæqualia.
5 Si inæqualibus æqualia addant̃, aggregata erunt inæqualia.
6 Si duæ res fuerint uni duplices, ipſæ ſibi inuicem erunt æquales.
7 Si fuerint duæ res quarũ utracp̃ unius & eiuſdẽ eſt dimidium, erunt ſibi inuicem ęquales.
8 Siqua res alteri ſuperponatur appliceturcp̃ ei, nec excedat altera alterã, hæ erunt ſibi inuicẽ æquales. Et econtrario.
9 Omne totum maius eſt ſua parte.
10 Totũ ęquale eſt ſuis oĩbus partibus ſiſſumptis.

a iij

Κοιναὶ ἔννοιαὶ

1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
2. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
4. [Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.]
5. [Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]
6. [Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]
7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
8. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].
9. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Algemene inzichten

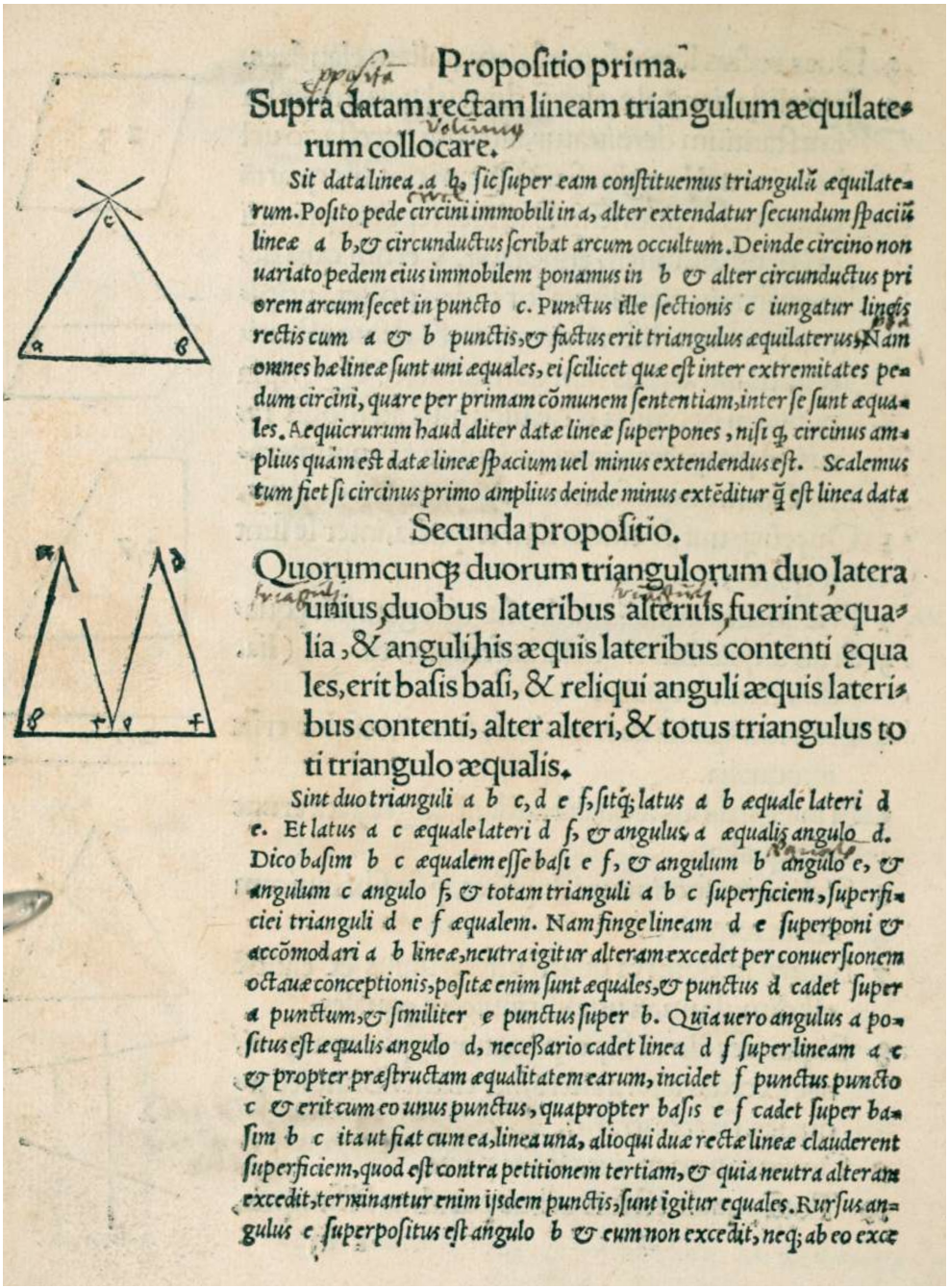
1. Dingen gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk.
2. En als men bij gelijke dingen gelijke voegt, zijn de totalen gelijk.
3. En als men van gelijke dingen gelijke afneemt, zijn de resten gelijk.
4. [Wanneer gelijke dingen aan ongelijke dingen worden toegevoegd is het geheel ongelijk] *)
5. [Dingen die het dubbele van hetzelfde zijn, zijn gelijk.] *)
6. Dingen die de helft zijn van hetzelfde, zijn hetzelfde.
7. En dingen die op elkaar passen zijn gelijk.
8. En het geheel is groter dan het deel
9. [Twee rechte lijnen omvatten geen ruimte.] *)

De geleerden zij het erover eens dat de inzichten 4, 5 en 6 later zijn toegevoegd en overbodig zijn.

De latijnse versie

Algemene gevoelens

1: Al wat aan een en hetzelfde gelijk is, is onderling gelijk
2: Als aan gelijke dingen gelijke dingen worden toegevoegd, zijn de resultaten gelijk.
3: Als van gelijke dingen gelijke dingen worden afgenomen, zijn de resten gelijk.
4: Als van ongelijke dingen gelijke dingen worden afgenomen, zijn de resten ongelijk.
5: Als aan ongelijke dingen gelijke dingen worden toegevoegd, zijn de resultaten ongelijk.
6: Als twee dingen het dubbele van hetzelfde zijn, zijn ze zelf op hun beurt weer gelijk.
7: Als twee dingen beide elk de helft van hetzelfde zijn, zijn ze zelf op hun beurt weer gelijk.
8: Als een zaak op een andere wordt gelegd en en erop wordt aangepast en de een de ander niet overtreft, zijn deze onderling gelijk. En het omgekeerde.
9: Elk geheel is groter dan zijn deel.
10: Het geheel is gelijk aan de som van al zijn delen tesamen.



Propoſitio prima.

Supra datam rectam lineam triangulum æquilaterum collocare.

Sit data linea a b, ſic ſuper eam conſtituemus triangulũ æquilaterum. Poſito pede circini immobili in a, alter extendatur ſecundum ſpaciũ lineæ a b, & circunductus ſcribat arcum occultum. Deinde circino non uariato pedem eius immobilem ponamus in b & alter circunductus priorem arcum ſecet in puncto c. Punctus ille ſectionis c iungatur lineis rectis cum a & b punctis, & factus erit triangulus æquilaterus. Nam omnes hæ lineæ ſunt uni æquales, ei ſcilicet quæ eſt inter extremitates pedum circini, quare per primam cõmunem ſententiam, inter ſe ſunt æquales. Æquicrurum haud aliter datæ lineæ ſuperpones, niſi q; circinus amplius quàm eſt datæ lineæ ſpacium uel minus extendendus eſt. Scalemus tum fiet ſi circinus primo amplius deinde minus extẽditur q̃ eſt linea data

Secunda propoſitio.

Quorumcunq; duorum triangulorum duo latera unius, duobus lateribus alterius, fuerint æqualia, & anguli his æquis lateribus contenti æquales, erit baſis baſi, & reliqui anguli æquis lateribus contenti, alter alteri, & totus triangulus toti triangulo æqualis.

Sint duo trianguli a b c, d e f, ſitq; latus a b æquale lateri d e. Et latus a c æquale lateri d f, & angulus a æqualis angulo d. Dico baſim b c æqualem eſſe baſi e f, & angulum b angulo e, & angulum c angulo f, & totam trianguli a b c ſuperficiem, ſuperficiei trianguli d e f æqualem. Nam finge lineam d e ſuperponi & accõmodari a b lineæ, neutra igitur alteram excedet per conuerſionem octauæ conceptionis, poſitæ enim ſunt æquales, & punctus d cadet ſuper a punctum, & ſimiliter e punctus ſuper b. Quia uero angulus a poſitus eſt æqualis angulo d, neceßario cadet linea d f ſuper lineam a c & propter præſtructam æqualitatem earum, incidet f punctus puncto c & erit cum eo unus punctus, quapropter baſis e f cadet ſuper baſim b c ita ut fiat cum ea, linea una, alioqui duæ rectæ lineæ clauderent ſuperficiem, quod eſt contra petitionem tertiam, & quia neutra alteram excedit, terminantur enim iiſdem punctis, ſunt igitur equales. Rurſus angulus e ſuperpoſitus eſt angulo b & cum non excedit, neq; ab eo exce

Op deze pagina, die op de *Communes sententiae* volgt, beginnen meteen de 'Proposities', dat zijn de constructies en de stellingen.
De eerste 'Propositio prima' is de constructie van een gelijkzijdige driehoek op een gegeven basis.
De tweede 'Secunda propositio' is de stelling dat twee driehoeken congruent zijn als ze twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben.
De eerste propositie is ook de eerste propositie in het oorspronkelijke werk van Euclides. De tweede propositie in deze Latijnse vertaling is propositie 4 bij Euclides.