

Echte wiskunde

Copyright ©2013 P.W. Hemker

ISBN 978 94 6228 0687

Echte wiskunde

P.W. Hemker

2013

HET PATRYS
Amsterdam

E. Elderenbosch



N.G. de Bruijn



C.G. Lekkerkerker



A. Heyting



Voorwoord

Dit is geen oorspronkelijk werk. Het materiaal dat hier verzameld is komt uit verschillende bronnen.

Het eerste hoofdstuk is ontleend aan mijn diktaat van de lessen planimetrie uit de eerste klassen van het Barlaeusgymnasium, Amsterdam, 1955-1957, gegeven door E. Elderenbosch. Ook heb ik gebruik gemaakt van het diktaat van mijn klasgenoot Constantijn Kelk. Ik heb geprobeerd dit eerste hoofdstuk geschikt te houden voor leerlingen uit de eerste klassen van de middelbare school.

Natuurlijk betekent zo'n eerste kennismaking met de wiskunde dat de behandeling volledig intuïtief is. Van definities (hier eerst 'bepalingen' genoemd) wordt zo maar aangenomen dat ze geen problemen zullen opleveren, en er wordt geregeld een beroep gedaan op het visuele voorstellingsvermogen.

Het is heel aardig om het begin van de meetkunde zoals dat in de jaren 50 van de 20ste eeuw onderwezen werd (en zoals we het hier terugvinden) te vergelijken met het begin van de "Elementen" van Euclides. Hoe deze "Elementen" zijn opgebouwd is heel mooi beschreven in paragraaf 64 van [3], een van mijn favoriete boeken uit die tijd.

Het tweede hoofdstuk is een bewerking van het diktaat 'Inleiding tot de moderne wiskunde' van N.G. de Bruijn uit 1965. Het derde hoofdstuk is een bewerking van het diktaat 'Lineaire Analyse' van C.G. Lekkerkerker uit 1967. Het vierde hoofdstuk is een bewerking van de 'Syllabus Analytische Meetkunde' van A. Heyting uit 1965.

De reden waarom ik deze diktaten heb opgepoetst is dat ik in het bijzonder door deze lessen een beter inzicht heb gekregen in de wiskunde. Omdat de materie die hier behandeld wordt, niet bijzonder moeilijk is, leek het mij dat het misschien aardig was om het voor een latere generatie te behouden.

De biografiën die de diktaten aanvullen zijn ontleend aan en vertaald uit de corresponderende delen van de website [12]. De auteurs (voor zover ik kon nagaan) zijn J.J. O'Connor and E.F. Robertson

P.W. Hemker

Inhoudsopgave

1	Euclidische meetkunde	1
1.1	Inleiding	2
1.1.1	Begin	2
1.1.2	Verplaatsingen en hoeken	3
1.1.3	Bijzondere verplaatsingen	5
1.2	Eerste bewijzen, hoekstellingen	5
1.3	Stellingen over evenwijdige lijnen gesneden door een derde	7
1.4	Driehoeken en driehoeksstellingen	8
1.4.1	De gelijkbenige driehoek	8
1.4.2	De gelijkzijdige driehoek	9
1.4.3	De gelijkbenige rechthoekige driehoek	9
1.4.4	Congruentie van driehoeken	9
1.5	** Euclides van Alexandrië **	11
1.6	Constructies met passer en lineaal	13
1.6.1	Het construeren van een gelijkzijdige driehoek	14
1.6.2	Het verplaatsen van een gegeven hoek	14
1.6.3	Een bisectrix construeren	14
1.6.4	Een lijnstuk halveren	15
1.6.5	Een loodlijn in een punt van een lijn oprichten	15
1.6.6	Uit een punt een loodlijn neerlaten op een rechte	15
1.6.7	Door een punt buiten een lijn een evenwijdige lijn construeren	16
1.6.8	Constructies om zelf uit te voeren	16
1.7	Vierhoeken	16
1.7.1	Bijzondere vierhoeken	16
1.7.2	Het parallellogram	17
1.7.3	De ruit	18
1.7.4	De rechthoek	18
1.7.5	Afstand en oppervlakte	19
1.7.6	De stelling van Pythagoras	19
1.7.7	Figuren op de middens van de zijden	21
1.8	Meetkundige plaatsen	22
1.8.1	Constructies	22
1.8.2	De cirkel	22
1.9	Transformaties	26
1.9.1	Verhoudingen van lijnstukken	26
1.9.2	Vermenigvuldigen van figuren	28
1.9.3	Gelijkvormigheid	29

1.10	Bijzondere lijnstukken in de driehoek	30
1.10.1	Concurrentie van bijzondere lijnstukken	30
1.10.2	Nog enkele driehoekstellingen	31
1.10.3	Nogmaals de stelling van Pythagoras	32
1.11	Nog enkele beroemde stellingen	33
1.11.1	De machtstelling	34
1.11.2	De stellingen van Menelaos en De Ceva	36
1.12	Een heel eenvoudig bewijs voor Pythagoras	37
1.13	** Het begin van Euclides' Elementen **	38
2	Wiskundige tovertaal	47
2.1	Symbolen	47
2.2	Wiskundige beweringen	48
2.3	Verzamelingen	55
2.4	Natuurlijke getallen	57
2.5	Afbeeldingen	58
2.6	** René Descartes **	60
2.7	Equivalentierelaties	63
2.8	Machtigheid, kardinaalgetallen	65
2.9	Verschillende betekenissen van het woord oneindig	67
2.10	Ontwikkeling van het getalbegrip	68
2.11	** Augustin Louis Cauchy, een onaangenaam mens **	69
2.12	Verzamelingen met een structuur	74
2.12.1	Groepen	74
2.12.2	Ringen	75
2.12.3	Lichamen	76
2.12.4	Morfismen	76
2.13	Allereenvoudigste getaltheorie	77
2.14	Een zeer korte overzicht van de wiskunde	79
3	Lineaire analyse	85
3.1	Metrische ruimten	85
3.2	Lineaire ruimten	90
3.3	Genormeerde lineaire ruimten	91
3.4	Banachruimten	92
3.5	Lineaire deelruimten, factorruimten	96
3.6	** Stefan Banach **	99
3.7	Hilbert ruimten	103
3.7.1	Definities en voorbeelden	103
3.7.2	Orthoplement van een lineaire deelruimte	107
3.7.3	Orthonormale stelsels	109
3.7.4	Isometie, Separabiliteit	114
3.8	** David Hilbert **	116
3.9	Lineaire operatoren	120
3.9.1	Algemene eigenschappen	120
3.9.2	Lineaire functionalen	122
3.9.3	Geadjungeerde operatoren in Hilbertruimten	124
3.9.4	Projectoren in Hilbertruimten	126
3.9.5	Compacte operatoren in Hilbertruimten	129

4 Analytische Meetkunde	135
4.1 Enkele stellingen uit de lineaire algebra.	135
4.1.1 Coördinaten in een vectorruimte	135
4.1.2 Coördinatentransformatie	135
4.1.3 Een bilineaire functie	136
4.1.4 De Euclidische ruimte	137
4.1.5 Eigenwaarden van een kwadratische functie	138
4.2 Kwadratische vormen	139
4.2.1 Invariantie van het karakter onder transformaties	139
4.2.2 De homogene kwadratische vorm	140
4.2.3 De standaard kwadratische vorm	140
4.3 Kegelsneden in het platte vlak	141
4.4 Omwentelingsoppervlakken	142
4.5 Algemene tweedegraadsoppervlakken	142
4.6 Kegels en Cylinders	145
4.7 Herleiding van de algemene vergelijking van de kwadriek	146
4.8 Algebraïsche krommen	147
4.8.1 Toepassing op kegelsneden	148
4.8.2 Asymptoten	149
4.8.3 Toepassing op kegelsneden	149
4.9 Algebraïsche oppervlakken	149
4.9.1 Gedrag in een punt $P(p_1, p_2, p_3)$	150
4.9.2 Asymptotische richtingen	151
4.9.3 Toepassing op kwadrieken	151
4.9.4 De richtkegel	151
4.10 Meetkundige Plaatsen	151
4.10.1 Regelvlakken	151
4.10.2 Cylinder en kegel	152
4.10.3 Omwentelingsoppervlakken	152
4.11 Ruimtekrommen	152
4.12 Isometrische afbeeldingen	153
4.13 Invarianten	154
Bibliography	157
Index	159

Bibliografie

- [1] B Belhoste. *Augustin-Louis Cauchy. A Biography*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] I. Bulmer-Thomas. Euclid. In *Dictionary of Scientific Biography*. Charles Scribner's Sons, New York, 1970–1980.
- [3] L. N. H. Bunt. *Van Ahmes tot Euclides*. J.B. Wolters, Groningen, Djakarta, 1954.
- [4] J.A. Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Academic Press, 1962.
- [5] G Fisher. Cauchy and the infinitely small. *Historia Mathematica*, 5:313–331, 1978.
- [6] H Freudenthal. Did Cauchy plagiarise Bolzano. *Archive for History of Exact Sciences*, 7:375–392, 1971.
- [7] P.R. Halmos. *Introduction to Hilbert space*. Chelsea, 1951.
- [8] J. Hjelmslev. Über Archimedes' Grössenlehre. *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd*, 25:15, 1950.
- [9] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, 1970.
- [10] E. Landau. *Grundlagen der Analysis*. Akad. Verlagsges., 1930.
- [11] L.A. Lyusternik and V.I. Sobolev. *Elemente der Funktionalanalysis*. Akademie-Verlag, 1955.
- [12] J. J. O'Connor and E. F. Robertson (School of Mathematics & Statistics; University of St Andrews; Scotland). Mathematician biography index.
Website: www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html, Febr 2005.
- [13] W.J. Pervin. *Foundations of General Topology*. Academic Press, 1964.
- [14] J. F. Scott. *The Scientific Work of Rene Descartes (1596-1650)*. Taylor & Francis, 1952.
- [15] H. A. Thurston. *The Number System*. Dover Publications, 2007.
- [16] C. A. Valson. *Le Baron Augustin Cauchy: sa vie et ses travaux*. Gauthier-Villars, Paris, 1868.
- [17] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1974.

Index

- $\mathbb{N}_0$, 66
- $\triangle$, 8
- ε -omgeving, 86
- Abels, 74
- afbeelding, 58, 120
 - éénéénduidig, 59
 - begrensd, 120
 - continu, 120
 - homomorfe, 76, 114
 - lineair, 114, 120
 - samengestelde, 60
- afstand, 85
 - tussen een punt en een lijn, 19
 - tussen twee evenwijdige lijnen, 19
 - tussen twee punten, 19
- aftelbaar, 66
- algebraïsch oppervlak, 149
- algebraïsche kromme, 147
- anti-ïsometrisch, 124
- anti-lineair, 104
- ascylinder
 - elliptisch, 146
 - hyperbolisch, 146
 - nuldelig, 146
- associatief, 74
- asymptoot, 149
- asymptotische richting, 149, 151
- automorfisme, 76, 121
- axioma, 1, 2
- Banachruimte, 92
- basis, 8, 91
- basishoeken, 8
- beeld van, 59
- benen, 4, 8, 16
- bepaling, 1, 2
- betrekking van Parseval, 112
- beweringen, 49
- bewijs
 - indirect, 50
 - uit het ongerijmde, 7, 50
- bewijzen, 6
- bijjectie, 59
- bijjectief, 59
- bilineaire functie, 136
- binnenhoek, 7, 8
 - verwisselende, 7
- bisectrix, 4
- buitenhoek, 7, 8
 - verwisselende, 7
- Cartesisch product, 57
- Cauchy-Boenjakowski, 104
- Cauchy-rij, 87
- Cauchy-Schwarz, 104
- cirkel, 2, 4, 22
 - binnen de, 4
 - buiten de, 4
 - op de, 4
- cirkelboog, 4
- coördinaten, 135
- collineaire punten, 22
- commutatief, 74
- compact, 86, 129
 - relatief, 129
 - rijtjes, 129
- complement, 5
- congruent, 5, 29
- conjunctie, 49
- continu, 86
- contrapositie, 50
- convergent, 86
 - absoluut, 93
- cylinder, 152
 - elliptische, 145
 - hyperbolische, 145
 - parabolische, 145, 146
- De Ceva, 36
- deductief, 1
- deelbaar door, 77

- deelbaar op, 77
- deellijn, 4
- deelruimte, 86
 - lineaire, 96
- deelverzameling, 56
 - echte, 56
- definitie, 1, 2
- dimensie, 91
- directe som, 108, 109
- disjunct, 56
- disjunctie, 49
- doorsnede, 56
- draaing, 5
- driehoek, 8
 - gelijkbenig, 8
 - gelijkzijdig, 9
 - rechthoekige, 8
 - scherphoekige, 8
 - stomphoekige, 8
- driehoeksongelijkheid, 85
- duale ruimte, 123
- eigenelement, 130
- eigenvector, 130
- eigenwaarde, 130
- element, 55
- elementen
 - overeenkomstige, 9
- ellips, 141
- ellipsoïde, 142, 146
- ellipsvaas, 142
- endomorfisme, 76, 121, 138
- equivalent, 22, 50, 52
 - norm, 92
- equivalentie, 50
- equivalentieklasse, 64
- equivalentierelatie, 64, 88
- Euclidische ruimte, 85
- Euclidische vectorruimte, 137
- factorruimten, 97
- figuur, 2
- functie, 58
- functies
 - abstracte, 96
- functionaal, 120
 - lineaire, 122
- fundamenteaalrij, 87
- gelijke hoeken, 4
- gelijkmachtigheid, 65
- gelijkstandig, 29
- gelijkvormig, 26, 29
- gelijkwaardig, 50
- genormeerd, 91
- gesloten lineair omhulsel, 96
- gesloten verzameling, 86
- getallenlichamen, 76
- geïsoleerd punt, 148
- graad, 4
- Gram-Schmidt proces, 110
- groep, 74
 - eindige, 74
- halsvlak, 146
- Hermitisch, 125
- Heron, 34
- Hilbertruimte, 105
- hoek, 4
 - gestrekte, 4
 - inspringende, 4
 - overliggende, 16
 - rechte, 4
 - scherpe, 4
 - stompe, 4
 - uitspringende, 4
- hoek-eenheid, 4
- hoeken
 - overeenkomstige, 7
- hoekpunt, 4
- hoekpunten, 16
- homogeen, 114
- homomorfisme, 76, 114, 121
- hoofdstelling van de algebra, 79
- hoogtelijn, 8
- hoogtepunt, 31
- hyperboloïde
 - eenbladig, 142
 - tweebladig, 142
- hyperbool, 141
- hypothenuza, 19
- identiteit, 126
- implicatie, 49
- inductief, 1
- injectie, 59, 60
- injectief, 59
- inproduct, 103, 137
- inverse, 59, 60

- links, 60
- rechts, 60
- inwendig punt, 86
- isometrie, 114
- isometrische afbeelding, 153
- isomorfie, 121
- isomorfisme, 76, 121
- kardinaalgetal, 65
- keerpunt, 148
- kegel, 152
 - eendelig, 146
 - kwadratisch, 145
 - omwentelings, 145
 - tweedelig, 146
- kegelsnede, 141
 - nuldelig, 141
- klassenindeling, 64
- knooppunt, 148
- koorde, 4
- kromme, 2
 - algebraïsche, 147
- kubus, 2
- kwadratische
 - functie, 138
 - kegel, 145
 - vorm, 139
- Lebesgue integreerbare functies, 96
- lengte, 3, 137
- lengte-eenheid, 3
- lichaam, 2
- lijn, 2
 - evenwijdige, 3
 - gebogen, 2
 - halve, 2
 - kromme, 2
 - kruisende, 3
 - rechte, 2
- lijnstuk, 2
- limietpunt, 87
- lineair omhulsel, 96
 - gesloten, 96
- lineair onafhankelijk, 90
- lineaire ruimte, 90
 - reële, 90
- loodlijn, 5
- loodrecht, 5, 107
- loodrecht op elkaar, 137
- machtigheid, 65
- machtigheid van het continuüm, 66
- maximaal, 91
- mediaan, 8
- meetkunde
 - vlakke, 3
- meetkundige plaats, 22
- Menelaos, 36
- metriek, 85
- metrische ruimte, 85
- middelloodlijn, 5, 22
- middelpunt, 4
- middelpuntskwadriek, 146
- minuut, 4
- modulus, 78
- MP, 22
- natuurlijke getallen, 57
- nevenhoek, 5
- norm, 91, 120
 - begrensde lineaire afbeelding, 120
 - equivalent, 92
- norminvariant, 114
- nulafbeelding, 120
- nulrij, 97
- nulruimte, 120
- omhulsel
 - lineair, 96
 - volledig, 90
- omkeerbaar, 74
- omkering, 51
- omwentelings
 - ellipsoïde, 142
 - halsvlak, 142
 - hyperboloïde
 - eenbladig, 142
 - tweebladig, 142
 - kegel, 145
 - kwadriek, 142
 - oppervlak, 142
 - paraboloïde, 142
 - tweeblad, 142
- ondeelbaar, 77
- onderling loodrecht, 107
- onderling meetbaar, 27
- oneindig, 66
 - aftelbaar, 66
 - verzameling, 66

- oneindige dimensie, 91
- oneindige verzamelingen, 66
- ongelijkheid van Bessel, 111
- onwaar, 49
- open verzameling, 86
- operator, 120
 - bilineair, 104
 - continu, 120, 122
 - lineair, 122
 - sesquilineair, 104
- oppervlak, 2
 - algebraïsch, 149
- oppervlakten, 19
 - van een driehoek, 34
- opspannen, 91
- orde, 74
- orthogonaal, 107
- orthogonale matrix, 138
- orthonormaal, 137
- orthonormaal stelsel, 109
 - volledig, 112
- orthonormaliseren, 110
- orthoplement, 107
- osculatievlak, 152
- paraboloïde
 - elliptisch, 146
 - elliptische, 142
 - hyperbolisch, 143, 146
 - omwentelings, 142
- parabool, 141
- parallelogram, 16, 41
- planimetrie, 3
- postulaten, 13
- pre-Hilbert ruimte, 103
- priemgetal, 77
- productfiguur, 28
- projectie, 32, 126
 - orthogonale, 126
 - scheve, 126
- projector, 126
- Ptolemaeus, 34
- punt, 2
 - elliptisch, 150
 - hyperbolisch, 150
 - inwendig, 86
 - parabolisch, 150
- punten, 85, 90
- Pythagoras, 20
- quantor, 51
 - existentiële, 51
 - universele, 51
- quotientruimte, 98
- quotientruimten, 97
- raakvlak, 150
- rang, 137
- rechthoek, 17, 41
- reeks, 93
- reflexief, 64
- regelvlak, 151
- relatie
 - binair, 63
- restklassen, 78
- richting, 3
- richtkegel, 151
- richtkromme, 151
- richtvlakken, 144, 151
- rotatie, 5
- ruimte
 - $B(T)$, 94
 - $C([a, b])$, 94
 - $L^p(\Omega)$, 95
 - $\mathbb{C}^k$, 94
 - $\mathbb{R}^k$, 85
 - ℓ^1 , 94
 - ℓ^∞ , 94
 - ℓ^p , 95
 - c , 98
 - Banach, 92
 - Euclidische, 85, 94
- ruimtecurve, 152
- ruit, 17, 41
- scaleen, 41
- Schmidt, 110
- seconde, 4
- separabel, 115
- som, 78
- som van de reeks, 93
- spiegeling, 5
- stelling, 5
 - van De Ceva, 36
 - van Heron, 34
 - van Menelaos, 36
 - van Ptolemaeus, 34
 - van Pythagoras, 20, 113
- stelsel

- volledig, 112
- maximaal, 112
- stereometrie, 3
- supplement, 5
- surjectie, 59
- surjectief, 59
- symmetrie, 85
- symmetrisch, 5, 64, 125
 - bilineaire functie, 137
 - endomorfisme, 138
- taal, 1
- tophoek, 8
- transformatie, 120
- transitief, 64
- trapezium, 16, 41
 - gelijkbenig, 16
 - rechthoekig, 16
- tweeblad, 142, 146
- uitspraken, 49
- vaas, 142
- van eindige rang, 130
- variabele
 - gebonden, 52
 - vrije, 52
- vector, 7
- vectoren, 90
- vectorruimte
 - Euclidische, 137
- verdichtingspunt, 86
- vereniging, 56
- vermenigvuldiging, 28
- vermenigvuldigingscentrum, 28
- verschil, 56
- verschuiving, 5
- verschuivings-vector, 5, 7
- verzameling, 55
 - eindige, 65
 - gesloten, 86
 - inwendig, 86
 - lege, 55
 - open, 86
- vierhoek, 16
- vierkant, 17, 41
- vlak, 2
 - plat, 2
- voetpunt, 8, 31
- voetpuntsdriehoek, 32
- voetpuntslijn(stuk), 32
- volledig, 87
- volledig orthonormaal stelsel, 112
- volledige inductie, 58
- volzinnen, 49
- voorwaarde
 - nodig en voldoende, 52
 - nodige, 52
 - voldoende, 52
- waar, 49
- zadelvlak, 143
- zijde, 8, 16
 - overliggende, 16
- zwaartelijn, 8
- zwaartepunt, 31

Colofon

Echte Wiskunde van P.W. Hemker is geprint en gebonden
door HET PATRYS i.s.m. Alberto Cozzi te Florence.

Van deze uitgave zijn vijf genummerde en door de
auteur gesigneerde exemplaren vervaardigd.

Dit is nummer

