

## 2. DE EINDIGE ELEMENTENMETHODE VOOR HET DISCRETISEREN VAN ELLIPTISCHE RANDWAARDEPROBLEMEN.

De eindige elementenmethode is een numerieke techniek die het mogelijk maakt de discretisering van randwaardeproblemen systematisch uit te voeren. Aanvankelijk werd de eindige elementenmethode in het begin van de jaren 50 ontwikkeld door civiel ingenieurs om gecompliceerde problemen uit de sterkteleer (structural mechanics) op te lossen. In latere jaren vond de methode een ruimer toepassingsgebied en werd het verband duidelijk tussen de eindige elementenmethode en de klassieke Ritz-methode. Sindsdien (na  $\pm$  1965) is het duidelijk geworden dat bepaalde principes uit de methode veel algemener toegepast kunnen worden en numeriek wiskundigen hebben een vrij hechte fundering voor en een groot aantal uitbreidingen van de methode gevonden.

Het is de bedoeling van dit hoofdstuk van het colloquium de wiskundige grondslagen van de methode in zijn eenvoudigste vorm te beschrijven. Een korte samenvatting van een aantal technieken die in verband met de eindige elementenmethode gebruikt worden, zal in het volgende hoofdstuk gegeven worden.

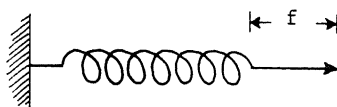
### 2.1. Inleiding

De eindige elementenmethode kan op twee verschillende manieren benaderd worden, van de fysische kant en van de mathematische kant.

#### Fysische beschrijving

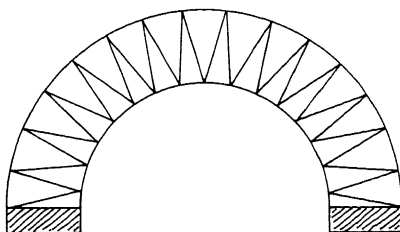
Deze beschrijving heeft een nauw verband met de oorspronkelijke formulering van de eindige elementenmethode in de sterkteleer. Een aantal termen, zoals stijfheidsmatrix en massamatrix, worden hieraan trouwens ontleend. We beschouwen eerst een eenvoudige lineair elastische structuur. Voor het

ééndimensionale geval (een enkele plaatscoördinaat) beschouwen we een veer.



Hiervoor geldt  $f = Ku$  (wet van Hooke), waarin  $f$  een kracht is die op de veer wordt uitgeoefend,  $K$  een constante en  $u$  de verplaatsing van het uiteinde is. De potentiële energie van de uitgetrokken veer bedraagt  $E = \frac{1}{2} f u$ .

Wanneer we een meer gecompliceerde structuur beschouwen, zoals hieronder aangegeven,



dan bestaat dezelfde relatie  $f = Ku$ .

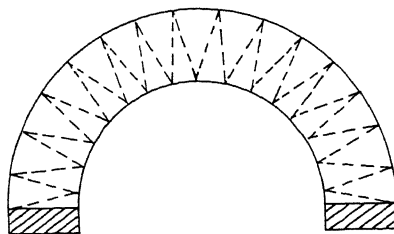
Hierin is  $f$  een vector van krachten, uitgeoefend op de verbindingpunten in de structuur;  $u$  is een vector van plaatscoördinaten (de afwijkingen van de verbindingpunten uit de oorspronkelijke toestand) en  $K$  is een matrix (de stijfheidsmatrix van het systeem). De inverse matrix  $M = K^{-1}$  wordt wel flexabiliteitsmatrix genoemd. De potentiële energie van de structuur wordt gegeven door  $E = \frac{1}{2} u^t f = \frac{1}{2} u^t Ku$ .

De matrix  $K$  is symmetrisch (actie = reactie) en positief definit. Wanneer de constructie in evenwicht is (d.w.z. in een stationaire toestand verkeert), dan wordt  $u$  bepaald door de eis

$$E(u) = \frac{1}{2} u^T K u$$

is minimaal.

Wanneer de eindige elementenmethode gebruikt wordt voor een elastisch continuum, kunnen we als volgt te werk gaan:



- (i) Het continuum wordt verdeeld in denkbeeldige *elementen*.
- (ii) De waarden van  $u$  op de hoekpunten van de elementen (de steunpunten) beschrijven het gedrag van de gehele constructie.
- (iii) Binnen de elementen wordt een *interpolatieformule* gekozen om de toestand te beschrijven.
- (iv) *Uitwendige krachten* en *randvoorwaarden* worden geconcentreerd op de hoekpunten gedacht.

Bovendien moet nu aan de volgende voorwaarde (*compatibility condition*) voldaan worden: de interpolatieformules dienen zodanig te zijn dat op de gemeenschappelijke randen (tussen de elementen) hetzelfde interpolatieresultaat verkregen wordt.

#### Wiskundige beschrijving.

Een (vector-) functie  $u(x)$ , gedefinieerd op een gebied  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , moet gevonden worden, zodanig dat een convex functionaal  $E(u)$  geminimaliseerd wordt. Deze functie wordt, voor numerieke doeleinden, benaderd door een functie  $u_h$  uit een eindigdimensionale functieruimte  $V_h$  met basis  $\{\phi_i\}$ :

$$u_h(x) = \sum_i a_i \phi_i(x).$$

De eindige elementenmethode benadert nu de functie  $u \in V$  met die functie  $u_h \in V_h$  waarvoor geldt

$$E(u_h) \leq E(v), \text{ voor alle } v \in V_h.$$

Hiermee is de eindige elementenmethode in grote lijnen equivalent met de klassieke Ritz-methode. De eindige elementenmethode (the *nodal finite element method*) geeft bovendien echter suggesties voor een verstandige keuze van de functies  $\{\phi_i\}$ . Deze functies  $\phi_i$  worden namelijk als volgt geconstrueerd:

Eerst wordt het gebied  $\Omega$  in een aantal deelgebieden of elementen (meestal driehoeken of vierhoeken) verdeeld, zodanig dat naast elkaar liggende elementen de hoekpunten (i.h.a. steunpunten op gemeenschappelijke zijden) gemeenschappelijk hebben. Hierna worden de functies  $\phi_i$  gekozen zodat

- (i) een voldoende nauwkeurige interpolatie van een functie over het gebied  $\Omega$  mogelijk wordt;
- (ii) de drager van iedere functie  $\phi_i$  in een zo klein mogelijk aantal elementen bevat is;
- (iii) in elk steunpunt  $x_j$  de functiewaarden en de afgeleiden (tot een zekere orde) van alle  $\phi_i$  gelijk aan nul zijn, behalve voor één  $\phi_i$  waarvan of de functiewaarde of een afgeleide gelijk aan 1 is. In een formule kan dit aangegeven worden door

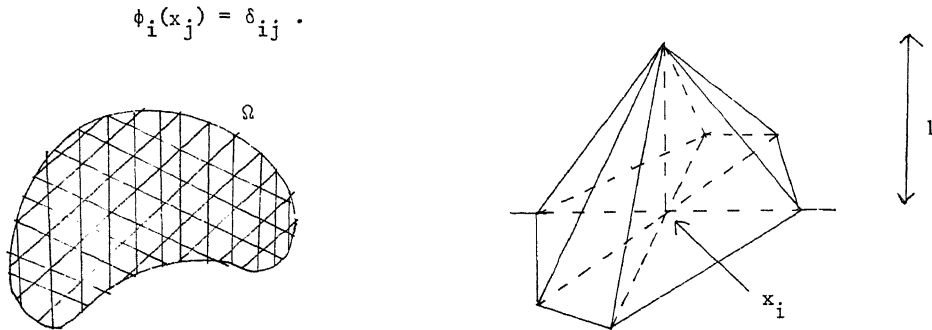
$$D_j \phi_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

$\delta_{ij}$  is hierin de Kronecker-delta.  $D_j$  is een differentiaaloperator van nulde orde ( $D_j u = u$ ) of van een hogere orde  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $(\partial/\partial x)^2$  e.d. . We merken op dat één steunpunt gecombineerd kan worden met verschillende differentiaaloperatoren; de index  $j$  definieert een paar  $(x_j, D_j)$ . Deze keuze van de functies  $\phi_i$  heeft het voordeel dat de parameters  $a_i$ , die in het proces berekend worden, direkt te interpreteren zijn als functiewaarden van  $u_h(x)$  of als waarden van een afgeleide.

- (iv) afhankelijk van de eigenschappen van de functionaal  $E(u)$  moet geëist worden dat alle  $\phi_i$  continu zijn op  $\Omega$ .

### Voorbeeld

Een keuze van  $\{\phi_i\}$  die geschikt is voor  $2^e$  orde elliptische randwaardeproblemen en die lineaire interpolatie mogelijk maakt op een 2-dimensionaal gebied  $\Omega$ , wordt gegeven door de "dak-functies". Hiervoor wordt het gebied overdekt met driehoekige elementen en wordt voor elk steunpunt  $x_i$  (hoekpunt) een functie  $\phi_i$  gekozen, lineair op elk element en zodanig dat



Figuur 2.1 Partitie van  $\Omega$ ; grafiek van  $\phi_i(x)$ .

Hoe een randwaardeprobleem waarin een tweede orde differentiaaloperator voorkomt, benaderd kan worden met functies die niet twee maal differentieerbaar zijn, zal in het volgende hoofdstuk behandeld worden

## 2.2. Verschillen tussen de eindige differentiemethode en de eindige elementenmethode

Het belangrijkste verschil tussen enerzijds de eindige differentiemethode en anderzijds de eindige elementenmethode en andere Ritz-Galerkin-achtige methoden is de wijze waarop de oplossing gepresenteerd en de continue operator gediscretiseerd wordt.

De oplossing  $u$ , van het oorspronkelijke probleem

$$Lu = f$$

kan beschouwd worden als een element van een genormeerde lineaire ruimte  $V$ , welke bestaat uit functies die gedefinieerd zijn op een deelgebied  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Bij de eindige differentiemethode worden  $u$  en  $f$  gediscretiseerd door de discretiseringsoperator  $[\cdot]_h$ . Deze voegt aan de functie  $u$ , gedefinieerd op  $\Omega$ , een functie  $[u]_h$  toe die gedefinieerd is op een discrete puntverzameling, n.l. op het rooster  $\Omega_h$ . We kunnen zeggen dat het definitiegebied gediscretiseerd wordt en dat de functies  $u$  en  $f$  door de discretiseringsoperator worden aangepast. De operator  $L_h$  wordt hierna (door "intelligent proberen") samengesteld en de doeltreffendheid van  $L_h$  wordt nagegaan aan de hand van de begrippen consistentie en stabiliteit.

Bij de Ritz-Galerkin-achtige methoden blijft het definitiegebied  $\Omega$  in principe ongewijzigd. De genormeerde ruimte  $V$  waartoe  $u$  behoort, wordt

echter benaderd door een eindigdimensionale functieruimte  $V_h$ . Er wordt een restrictie  $r_h: V \rightarrow V_h$  gedefinieerd en een extensie  $p_h: V_h \rightarrow V$ .

Op analoge wijze wordt de genormeerde ruimte  $W$ , waartoe  $f$  behoort, benaderd met  $W_h$  en worden een restrictie  $s_h: W \rightarrow W_h$  en een extensie  $q_h: W_h \rightarrow W$  gedefinieerd.

Elke operator  $L: V \rightarrow W$  krijgt nu op eenduidige wijze een discreet equivalent  $L_h: V_h \rightarrow W_h$  door de definitie

$$L_h = s_h L p_h .$$

De doeltreffendheid van het proces wordt nu geanalyseerd aan de hand van de eigenschappen van de restricties en extensies. Bij de Ritz-Galerkin-achtige methoden moet de constructie van de restricties en extensies door "intelligent proberen" tot stand gebracht worden.

Een tweede opvallend verschil tussen de eindige differentiemethode en de eindige elementenmethode is, dat bij de eindige differentiemethode meestal wordt uitgegaan van het randwaardeprobleem in de operatorvorm  $Lu = f$  terwijl men bij de eindige elementenmethode uitgaat van een equivalent variatieprobleem. In de paragrafen 2.4 en 2.5 zal hierop verder worden ingegaan.

### 2.3. Discrete benadering van een genormeerde lineaire ruimte; Convergence en stabiliteit

Zoals we in de vorige paragraaf reeds zagen, wordt de oplossing  $u \in V$  van een randwaardeprobleem, bij de eindige elementenmethode benaderd door een element  $u_h \in V_h$ . Om de eigenschappen van zo'n benadering te analyseren, willen we niet alleen een element  $v \in V$  benaderen met een element  $v_h$  uit *een bepaalde* andere genormeerde ruimte, maar we willen nagaan hoe  $v$  benaderd kan worden door elementen uit een klasse genormeerde ruimten.

#### Voorbeeld 2.3.1.

We willen niet alleen weten hoe een bepaalde continue functie op het interval  $[0,1]$  benaderd kan worden door een stapfunctie met  $N$  vast gekozen sprongpunten, we willen ook weten in welke mate de benadering beter wordt wanneer we het aantal sprongpunten vergroten.

We zullen daarom een genormeerde lineaire ruimte  $V$  benaderen met een klasse van genormeerde lineaire ruimten  $\{V_h\}_{h \in H}$ . Bij de index  $h$  denken we

aan een maaswijdte en we laten een limietovergang  $h \rightarrow 0$  toe. Formeel kan als indexverzameling  $H$  bijvoorbeeld gekozen worden: een omgeving van de oorsprong in een eindig dimensionale vectorruimte.

Op twee manieren kunnen we nu een element  $u_h \in V_h$  vergelijken met het element  $u \in V$ . We kunnen een afbeelding  $r_h: V \rightarrow V_h$ , de restrictie van  $V$  tot  $V_h$ , construeren en  $r_h u$  vergelijken met  $u_h$  of we kunnen een afbeelding  $p_h: V_h \rightarrow V$ , de extensie van  $V_h$  tot  $V$ , construeren en  $p_h u_h$  vergelijken met  $u$ . We voeren beide afbeeldingen,  $r_h$  en  $p_h$ , in en we definiëren de benadering van een genormeerde ruimte.

### Definitie 2.3.1

De benadering van een genormeerde lineaire ruimte  $V$  bestaat uit een verzameling tripels  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in H}$  waarin

- (i)  $V_h$  een genormeerde lineaire ruimte is;
- (ii)  $p_h$  een begrensde lineaire injectie van  $V_h$  is, en
- (iii)  $r_h$  een begrensde lineaire surjectie van  $V$  op  $V_h$  is.

### Opmerking 2.3.1

Bij het oplossen van randwaardeproblemen zal  $V$  dikwijls een Sobolev-ruimte zijn en we zullen voor  $V_h$  eindig dimensionale functie ruimten kiezen, waarvan de dimensie afhankelijk is van  $h$ . Bovendien kiezen we veelal  $V_h \subset V$ .

### Definitie 2.3.2

Voor een gegeven  $h \in H$  heet voor ieder  $u \in V$ ,  $u_h \in V_h$

- (i)  $\|u - p_h u_h\|_V$  het verschil tussen  $u$  en  $u_h$ ;
- (ii)  $\|u_h - r_h u\|_{V_h}$  het discrete verschil tussen  $u$  en  $u_h$ ;
- (iii)  $\|u - p_h r_h u\|_V$  de afbreekfout van  $u$ .

### Definitie 2.3.3 De norm van een operator.

Is  $p$  een afbeelding van een genormeerde ruimte  $V$  in een genormeerde ruimte  $W$ , dan is de norm van  $p$  gedefinieerd door

$$\|p\| = \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} \|pv\|_W .$$

Definitie 2.3.4 Stabiele restricties en extensies.

Restricties  $r_h$  en extensies  $p_h$  heten stabiel wanneer de normen  $\|r_h\|$  resp.  $\|p_h\|$  uniform begrensd zijn met betrekking tot  $h$ .

Definitie 2.3.5 Stabiele benadering.

We noemen een benadering  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in H}$  van een ruimte  $V$  stabiel als alle restricties en extensies stabiel zijn.

Definitie 2.3.6 Convergente benadering.

We noemen een benadering  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in H}$  van een ruimte  $V$  convergent als voor elke  $u \in V$  geldt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|p_h r_h u - u\|_V = 0.$$

Opmerking 2.3.2

Als  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in H}$  een stabiele benadering van  $V$  is, dan is deze benadering reeds convergent voor  $V$  als hij convergent is voor een dichte deelverzameling van  $V$ . Zie hiervoor CEA [1964].

Definitie 2.3.7

We zeggen dat een rij  $\{u_h\}$  convergeert naar  $u$ , als geldt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - p_h u_h\|_V = 0.$$

We zeggen dat een rij  $u_h$  discreet convergeert naar  $u$ , als geldt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - r_h u\|_{V_h} = 0.$$

Stelling 2.3.1

Als de benadering  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in H}$  van de ruimte  $V$  stabiel en convergent is, dan is elke discreet convergente rij  $\{u_h\}$  ook convergent.



Bewijs

$$\begin{aligned} \|u - p_h u_h\|_V &\leq \|u - p_h r_h u\|_V + \|p_h r_h u - p_h u\|_V \\ &\leq \|u - p_h r_h u\|_V + \|p_h\| \|r_h u - u\|_{V_h}. \end{aligned}$$

De eerste term nadert tot nul vanwege de convergentie van de benadering;  $\|p_h\|$  is uniform begrensd voor  $h \rightarrow 0$ . Hieruit volgt de stelling direkt.  $\square$

Voorbeeld 2.3.2

Als  $V$  een separabele Hilbert-ruimte is met een basis  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , dan kunnen we een benadering  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h = 1/n, n \in \mathbb{N}}$  construeren als volgt:

- (i)  $V_h$  is de ruimte opgespannen door  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ ;
- (ii)  $p_h$  is de kanonieke injectie  $V_h \rightarrow V$ ;
- (iii)  $r_h$  is de projectie van  $V$  op  $V_h$ .

Het is eenvoudig in te zien dat deze benadering stabiel en convergent is.

Definitie 2.3.8 Discrete norm.

Door een extensie  $p_h: V_h \rightarrow V$  wordt op  $V_h$  een norm  $\|\cdot\|_h$  geïnduceerd door

$$\|u_h\|_h = \|p_h u_h\|_V.$$

Deze norm wordt de *discrete norm* (geïnduceerd door  $p_h$ ) genoemd.

Voor de discrete norm op  $V_h$  geldt  $\|p_h\| = 1$ .

Approximatie van operatoren.

Laten  $V$  en  $W$  twee genormeerde lineaire ruimten zijn en laat  $L: V \rightarrow W$  een begrensde lineaire operator zijn. We nemen aan dat voor elke  $f \in W$  er één oplossing bestaat voor de vergelijking

$$Lu = f$$

(m.a.w.  $L$  is een isomorfisme).

We willen nu een discreet analogon van deze vergelijking construeren. Hier toe definiëren we een discrete operator en een discreet rechterlid  $f_h$ .

We maken hierbij gebruik van de discrete norm  $\|\cdot\|_h$  op  $V_h$ .

Definitie 2.3.9

Zij  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in H}$  een benadering van  $V$  en zij  $\{W_h, q_h, s_h\}_{h \in H}$  een benadering van  $W$ , dan wordt de *discrete operator*  $L_h$ , behorend bij de continue operator  $L$ , gedefinieerd door

$$L_h = s_h L p_h.$$

Het *discrete rechterlid*  $f_h \in W_h$ , behorend bij het rechterlid  $f$ , wordt gedefinieerd door

$$f_h = s_h f.$$

Definitie 2.3.10

De discrete operator  $L_h$  heet *stabiel* als er een constante  $S > 0$  bestaat, onafhankelijk van  $h$ , zodat

$$\|p_h u_h\|_V \leq S \|L_h u_h\|_{W_h}$$

voor elke  $h \in H$  en  $u_h \in V_h$ .

Opmerking 2.3.3

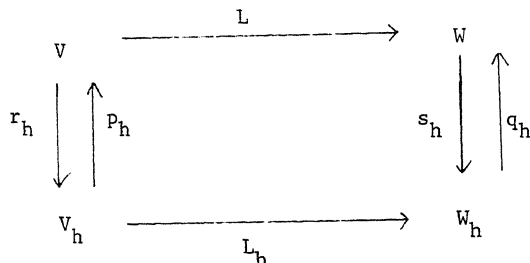
Als  $\{W_h, g_h, s_h\}$  een *stabiele benadering* is van  $W$ , dan geldt voor een *stabiele*  $L_h$

$$\begin{aligned} S^{-1} \|p_h u_h\|_V &\leq \|L_h u_h\|_{W_h} = \|s_h L p_h u_h\|_{W_h} \\ &\leq \sup_{h \in H} \|s_h\| \cdot \|L\| \cdot \|p_h u_h\|_V. \end{aligned}$$

In het bijzonder impliceert dit dat  $L_h$  een *isomorfisme* is van  $V_h$  (met de discrete norm geïnduceerd door  $p_h$ ) op  $W_h$ .

Gevolg

Als de discrete operator  $L_h$  *stabiel* is en de benadering van  $W$  is *stabiel*, dan heeft de discrete vergelijking  $L_h u_h = f_h$  een eenduidige oplossing.



Figuur 2.2

Stelling 2.3.2

Laat  $u \in V$  de oplossing zijn van  $Lu = f$ ,  $f \in W$  willekeurig, en laat  $u_h \in V_h$  de oplossing zijn van de gediscretiseerde vergelijking  $L_h u_h = f_h$ .

Als (i) de discrete operatoren  $L_h$  stabiel zijn;

(ii)  $\{W_h, q_h, s_h\}_{h \in H}$  een stabiele benadering is van  $W$ ;

(iii)  $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in H}$  een convergente benadering is van  $V$ .

Dan (i) bestaat er een eenduidige oplossing voor de discrete vergelijking;

(ii) convergeert de discrete oplossing naar de continue oplossing, in die zin dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_h u_h = u.$$

Bewijs

(i) volgt direkt uit opmerking 2.3.3.

(ii) leiden we af met behulp van de volgende ongelijkheid

$$\begin{aligned}
 \|u_h - r_h u\|_h &= \|p_h(u_h - r_h u)\|_V \leq S \|L_h(u_h - r_h u)\|_{W_h} = \\
 &= S \|s_h L u - s_h L p_h r_h u\|_{W_h} \leq S \sup_H \|s_h\| \|L\| \|u - p_h r_h u\|_V.
 \end{aligned}$$

Uit de stabiliteit van de benadering van  $W$  en uit de convergentie van de benadering van  $V$  volgt dat  $u_h$  discreet convergeert naar  $u$ . Door toepassen van stelling (2.3.1) volgt de convergentie.  $\square$

2.4. Randwaardeproblemen en convexe functionalen

Eén van de belangrijkste principes die aan de klassieke eindige elementenmethode ten grondslag liggen is, dat een lineaire differentiaalvergelij-

king (met homogene randvoorwaarden) van de vorm

$$(2.4.1) \quad Lu = f$$

in verband gebracht kan worden met de kwadratische functionaal

$$(2.4.2) \quad E(v) = (Lv, v) - 2(f, v).$$

De oplossing van de vergelijking in operatorvorm (2.4.1), met een positief definitieve operator  $L$ , is precies het element dat de functionaal (2.4.2) minimaliseert. In veel toepassingen - i.h.b. waar stationaire toestanden van een fysisch systeem beschreven worden - geeft de formulering in termen van de functionaal het primaire fysische principe weer, terwijl de differentiaalvergelijking slechts een gevolg hiervan is. Hierdoor is het niet verbazingwekkend dat, in dat geval, het minimaliseren van de convexe functionaal het eigenlijke probleem is waarvan de oplossing benaderd moet worden. We geven hieronder enige voorbeelden van functionalen en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 2.4.1 De vergelijking van Laplace.

Zij  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  met rand  $\partial\Omega$ ,  $u \in C^2(\Omega)$  en zij  $u(x) = g(x)$  op  $\partial\Omega$ . De oplossing van

$$(2.4.3) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

minimaliseert de functionaal

$$(2.4.4) \quad E(u) = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) \, d\Omega.$$

Voorbeeld 2.4.2 De doorbuiging van een vastgeklemd plaat.

Een kracht loodrecht op de plaat wordt gegeven door  $g(x, y)$ .

De randwaarden zijn  $u = u_n = 0$  op  $\partial\Omega$ .

De oplossing van

$$(2.4.5) \quad u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = g(x, y)$$

minimaliseert de functionaal

$$(2.4.6) \quad E(u) = \int_{\Omega} u_{xx}^2 + 2 u_{xy}^2 + u_{yy}^2 - 2 g(x,y)u \, d\Omega.$$

Voorbeeld 2.4.3 Straling ( $e^u$ ) en moleculaire diffusie ( $u^2$ ).

Zij  $u(x) = g(x)$  op  $\partial\Omega$ .

De oplossing van

$$u_{xx} + u_{yy} = e^u$$

resp.

$$u_{xx} + u_{yy} = u^2$$

minimaliseert de functionaal

$$E(u) = \int u_x^2 + u_y^2 + 2 e^u \, d\Omega$$

resp.

$$E(u) = \int u_x^2 + u_y^2 + \frac{2}{3} u^3 \, d\Omega.$$

#### Voorbeeld 2.4.4

De oplossing van de lineaire elliptische differentiaalvergelijking

$$(2.4.7) \quad Lu \equiv (au_x + bu_y)_x + (bu_x + cu_y)_y + fu = g,$$

$$b^2 - ac < 0 \text{ op } \Omega,$$

gedefinieerd op een begrensde gebied  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  met gladde rand  $\partial\Omega$ , met de natuurlijke randvoorwaarde

$$\alpha u + \gamma + \beta u_n + \delta u_s = 0 \text{ op } \partial\Omega,$$

waarin

$$u_n = \text{de inwendige normaalafgeleide,}$$

$$u_s = \text{de positieve tangentiële afgeleide,}$$

$$\beta = -a y_s^2 + 2 b x_s y_s - c x_s^2,$$

$$\delta = (a-c) x_s y_s + b (y_s^2 - x_s^2),$$

is equivalent met het minimaliserend element van de kwadratische functionaal

$$(2.4.9) \quad E(u) = \int_{\Omega} (au_x^2 + 2bu_x u_y + cu_y^2 - fu^2 + 2gu) \, dx dy + \int_{\partial\Omega} (\alpha u^2 + 2\gamma u) \, ds.$$

Voor het bewijs hiervan, zie FORSYTH & WASOW [1964].

### Inhomogene randvoorwaarden

Voor de behandeling van inhomogene randvoorwaarden introduceren we, in het bijzonder, een eendimensionaal modelprobleem. We beschouwen het volgende tweepunts randwaardeprobleem, gedefinieerd op  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ :

$$(2.4.10) \quad Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u = f(x),$$

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in I,$$

$$(2.4.11) \quad -u'(a) + \alpha u(a) = \beta$$

$$u'(b) + \gamma u(b) = \delta, \quad \alpha, \gamma \geq 0.$$

De bijbehorende kwadratische functionaal wordt gegeven door

$$E(v) = \int (p(v)^2 + qv^2) \, dx + \alpha p(a) v^2(a) + \gamma p(b) v^2(b) - 2 \int f v \, dx - 2\beta p(a) v(a) - 2\delta p(b) v(b).$$

De lezer kan op eenvoudige wijze nagaan dat de oplossing van het tweepunts randwaardeprobleem de functionaal minimaliseert.

### De kleinste kwadratenmethode

We moeten opmerken dat de functionaal die bij elk probleem genoemd is, niet de enige is waarvan het minimum met de oplossing van het randwaardeprobleem overeenkomt. Zo kan de oplossing  $u \in V$  van ieder randwaardeprobleem (zelfgeadjungeerd of niet)

$$Lu = f$$

beschouwd worden als het minimaliserend element van de functionaal

$$E(u) = \|Lu - f\|^2.$$

Het is ook zeer wel mogelijk om in dit geval de oplossing  $u$  te benaderen met het minimaliserend element  $u_h \in V_h$ .

Wanneer we de randvoorwaarden even verwaarlozen, is de functionaal

$$\begin{aligned} (2.4.13) \quad E(u) = \|Lu - f\|^2 &= (Lu, Lu) - 2(f, Lu) + (f, f) = \\ &= (L^T Lu, u) - 2(L^T f, u) + (f, f). \end{aligned}$$

De laatste term is onafhankelijk van  $u$  en daarom minimaliseert de kleinste kwadraten methode in feite

$$(2.4.14) \quad (L^T Lu, u) - 2(L^T f, u).$$

Dit is precies de Ritz-functionaal voor het probleem

$$(2.4.15) \quad L^T Lu = L^T f.$$

Het nieuwe probleem is automatisch zelfgeadjungeerd. De orde van de vergelijking is echter verdubbeld. Dit laatste heeft belangrijke consequenties voor de implementatie van de randvoorwaarden. Voor een behandeling van dit probleem zij verwezen naar BRAMBLE & SCHATZ [1970, 1971].

Het zal duidelijk zijn dat het kleinste kwadraten probleem ook numeriek slechter geconditioneerd is dan het oorspronkelijke.

## 2.5. De energieruimte

Het is de bedoeling van deze paragraaf na te gaan op welke wijze het minimaliserend element van een kwadratische functionaal samenhangt met het oplossen van een operatorvergelijking.

Bij de voorbeelden die in de vorige paragraaf gegeven werden, was het eenvoudig in te zien dat de oplossing van de differentiaalvergelijking de bijbehorende functionaal minimaliseert. Wanneer we echter het minimum van een functionaal willen vinden, moeten we ons eerst afvragen *over welke ruimte* we willen minimaliseren. Het is dan de vraag of op deze ruimte het *infimum aangenomen* wordt.

In de eerste plaats gaan we na hoe men het definitiegebied moet kiezen, opdat het infimum bereikt wordt. Als dit gebied uitgebreid is, dan bestaat er een oplossing (althans in gegeneraliseerde zin) en dan moet een effectieve manier worden aangegeven om deze oplossing te berekenen.

#### Voorbeeld 2.5.1

Om de vergelijking (2.4.3) op te lossen moeten we een functie  $u$  vinden waarvoor  $u_{xx}$  en  $u_{yy}$  bestaan, terwijl we bij het zoeken naar het minimum van (2.4.4) ook functies toelaten waarvoor  $u_{xx}$  en  $u_{yy}$  niet bestaan. Voor het bestaan van de functionaal behoeven  $u_x$  en  $u_y$  slechts kwadratisch integreerbaar te zijn en deze voorwaarde is (lang) niet voldoende om het bestaan van  $u_{xx}$  en  $u_{yy}$  te verzekeren.

We zullen ook zien dat het definitiegebied van de uitgebreide functionaal ook functies kan bevatten die niet aan de randvoorwaarden voldoen. Daarom moet ook duidelijk worden gemaakt wanneer en in welke zin de minimaliserende functie *wél* aan de randvoorwaarde voldoet.

In deze paragraaf is  $H$  een Hilbertruimte over het lichaam der reële getallen, met inproduct  $(\cdot, \cdot)$  en norm  $\|\cdot\|$ .  $D$  is een dichte deelruimte uit  $H$  en  $L$  is een lineaire operator  $L: D \rightarrow H$ .

#### Definitie 2.5.1

Een bilineaire functionaal  $\phi$  op  $D$  is een afbeelding  $\phi: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  zodanig dat voor alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  geldt

$$(2.5.1) \quad \begin{aligned} \phi(\alpha v + \beta w, u) &= \alpha \phi(v, u) + \beta \phi(w, u), \\ \phi(v, \alpha w + \beta u) &= \alpha \phi(v, w) + \beta \phi(v, u). \end{aligned}$$

#### Definitie 2.5.2

Een bilineaire functionaal heet symmetrisch, als geldt

$$(2.5.2) \quad \phi(u, v) = \phi(v, u), \quad \text{voor alle } u, v$$

#### Definitie 2.5.3

Een bilineaire functionaal heet begrensd als er een  $\beta > 0$  bestaat zodat

$$(2.5.3) \quad |\phi(u, v)| < \beta \|u\| \|v\|.$$



Definitie 2.5.4

Is  $\phi$  een bilineaire functionaal en is  $\ell$  een lineaire functionaal, dan heet

$$(2.5.4) \quad E(u) = \phi(u,u) - \ell(u)$$

een kwadratische functionaal.

Voorbeelden

De functionalen  $E(u)$  die geïntroduceerd werden in de voorbeelden 2.4.1, 2.4.2 en 2.4.4 zijn kwadratische functionalen, evenals de functionaal  $E(u)$  in vergelijking (2.4.12).

Definitie 2.5.5.

De bilineaire functionaal  $\phi: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  heet positief wanneer

$$(2.5.5) \quad \begin{aligned} \phi(u,u) &> 0, u \neq 0 \\ \phi(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Definitie 2.5.6

De bilineaire functionaal heet positief definitief wanneer er een  $\gamma > 0$  bestaat zodat voor alle  $u$  geldt

$$(2.5.6) \quad \phi(u,u) \geq \gamma^2 \|u\|^2.$$

Definitie 2.5.7

De operator  $L$  heet symmetrisch (begrensd, positief, positief definitief) als de bilineaire functionaal  $(Lu,v)$  symmetrisch (begrensd, positief, positief definitief) is.

Opmerking 2.5.1

Wanneer  $H$  een Hilbertruimte is over het lichaam der complexe getallen (i.p.v. over  $\mathbb{R}$ ), dan kan men, met overeenkomstige definities voor positieve en symmetrische operatoren, bewijzen dat iedere positieve operator symmetrisch is. Om deze reden zullen wij in het volgende alle positieve operatoren symmetrisch veronderstellen.

Stelling 2.5.1

$\Phi$  is een begrensde lineaire functionaal op  $D$  dan en slechts dan als er een éénduidige begrensde lineaire operator  $L$  op  $D$  bestaat zodat

$$\Phi(u,v) = (Lu,v).$$

Bewijs

Elementair, m.b.v. de stelling van Riesz; zie bijv. STUMMEL [1969] p.12.  $\square$

Stelling 2.5.2

Zij  $L: D \rightarrow H$  een positieve operator, dan bestaat er voor iedere  $f \in H$  hoogstens één oplossing  $u \in D$  zodat

$$Lu = f.$$

Bewijs Elementair.  $\square$ Stelling 2.5.3

Zij  $L: D \rightarrow H$  een positieve operator, dan zijn de volgende twee beweringen equivalent

- (i) er bestaat bij gegeven  $f \in H$  één  $u \in D$  zodat  $(Lu,v) = (f,v)$  voor alle  $v \in H$ ;
- (ii)  $u \in D$  minimaliseert de functionaal  $E(v) = (Lv,v) - 2(f,v)$ .

Bewijs

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

$$E(u+h) - E(u) = 2(Lu,h) - 2(f,h) + (Lh,h) = (Lh,h) \geq 0.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

$$\begin{aligned} E(u) &\leq E(u+\lambda h) = (Lu,u) + 2\lambda(Lu,h) + \lambda^2(Lh,h) - 2(f,u) - 2\lambda(f,h) = \\ &= E(u) + \lambda[\lambda(Lh,h)+2(Lu,h)-2(f,h)]. \end{aligned}$$

Dus voor alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  geldt  $\lambda[\lambda(Lh,h)+2(Lu,h)-2(f,h)] \geq 0$  zodat  $(Lu,h) = (f,h)$ .  $\square$

Opmerking 2.5.2

We doen hier geen uitspraak omtrent het bestaan van zo'n  $u \in D$ .

Stelling 2.5.4

Iedere positieve operator  $L$  induceert een prehilbertruimte-structuur op het definitiegebied  $D$ , door het inproduct

$$(2.5.7) \quad (u,v)_L = (Lu,v) = [u,v].$$

Bewijs Elementair.  $\square$

Gevolg

$D$  is een genormeerde lineaire ruimte  $(D_L)$  met de norm

$$(2.5.8) \quad \|u\|_L = (Lu,u)^{\frac{1}{2}} = \|u\|.$$

Definitie 2.5.8

De completering van de prehilbertruimte  $D_L$  wordt de *energieruimte*  $H_L$  genoemd.

Stelling 2.5.5

De energieruimte  $H_L$  van een positieve operator  $L$  is separabel d.e.s.d. als de oorspronkelijke ruimte  $H$  separabel is.

Bewijs MIKHLIN [1970], p.107.  $\square$

Opmerking 2.5.3

Aangezien  $D$  dicht ligt in  $H_L$  kan een aftelbare verzameling basisfuncties  $\{\phi_n\}$  uit  $D$  gekozen worden.

Stelling 2.5.6

Als de operator  $L$  positief definit is, dan is de prehilbertruimte  $D_L$  te completeren met elementen uit  $H$ ; m.a.w. als  $L$  positief is dan geldt de volgende inclusierelatie

$$D_L \subset H_L \subset H.$$

Bewijs YOSIDA [1965], p.317.  $\square$

Opmerking 2.5.4

Als  $L$  positief definit is dan volgt uit  $\bar{D} = H$  dat ook  $\bar{H}_L = H$  ( $\bar{\cdot}$  de afsluitingsoperator).

Opmerking 2.5.5

Als  $L$  positief definit is dan geldt voor alle  $u \in H_L$

$$\gamma \|u\| \leq \|u\|_L.$$

Evenzo geldt voor alle  $u \in D$  en  $v \in H_L$

$$(2.5.7) \quad (Lu, v) = (u, v)_L.$$

Gevolg

Als  $L$  positief definit is en  $\ell(u)$  een begrensde lineaire operator op  $H$ , dan is  $\ell(u)$  ook begrensd op  $H_L$ .

Opmerking 2.5.6.

Als  $L$  positief definit is en  $\ell$  is begrensd op  $H_L$ , dan is  $\ell$  niet noodzakelijk begrensd op  $H$ .

Stelling 2.5.7

Als de operator  $L$  positief is, maar niet positief definit dan kan het definitiegebied van  $(Lu, u)$  eenduidig worden uitgebreid tot  $H_L$ ; echter,  $H_L$  is niet noodzakelijk een deelverzameling van  $H$ . Er kan wel een injectie  $H \rightarrow H_L$  geconstrueerd worden.

Bewijs. MIKHLIN [1965], p.14.  $\square$

Gevolg

Als  $L$  positief is, maar niet positief definit, en  $\ell$  is begrensd op  $H$ , dan is  $\ell$  niet noodzakelijk begrensd op  $H_L$ .

Het variatieprobleem

Het variatieprobleem luidt als volgt: zij  $L$  een positieve operator gedefinieerd op een dichte deelverzameling  $D \subset H$  en zij  $\ell$  een lineaire functionaal (begrensd of onbegrensd) op  $H$ ; bepaal  $u$ , zodanig, dat de kwadratische functionaal

$$(2.5.8) \quad E(u) = (Lu, u) - 2\ell(u)$$

minimaal is.

Door de energieruimte  $H_L$  in te voeren schrijven we vergelijking

(2.5.3) als

$$(2.5.9) \quad E(u) = \|u\|_L^2 - 2\ell(u).$$

We onderscheiden nu twee mogelijkheden:

- (i)  $\ell$  is niet begrensd in  $H_L$ . In dit geval bestaat er geen minimum voor  $E(u)$  want er bestaat een rij  $\{u_n\}$  zodat  $\|u_n\|_L = 1$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(u_n) = \infty$ .
- (ii)  $\ell$  is begrensd in  $H_L$ .

Volgens de stelling van Riesz bestaat er dan één en slechts één  $u_0 \in H_L$  zodat  $\ell(u) = [u, u_0]$ . Nu kunnen we schrijven

$$(2.5.10) \quad E(u) = \|u - u_0\|_L^2 - \|u_0\|_L^2,$$

zodat het minimum wordt bereikt voor  $u_0 \in H_L$ .

Opmerking 2.5.7

- (i) Het definitiegebied  $D$  van de functionaal  $E$  wordt door de gelijkheid (2.5.10) uitgebreid tot  $H_L$ .
- (ii) Ligt  $u_0$  niet in  $D$ , dan kan men  $u_0$  een *gegeneraliseerde* oplossing van het variatie probleem noemen.
- (iii) Als  $L$  een positief definitieve operator is op  $D$  en als  $\ell$  begrensd is op  $H_L$ , maar onbegrensd op  $H$ , dan is  $u_0$  geen oplossing maar wel een *gegeneraliseerde* oplossing van het variatieprobleem. Immers, als  $u_0 \in D$  dan  $\ell(u) = (u_0, u)_L = (Lu_0, u)$  voor alle  $u \in H_L$ , zodat  $\ell$  begrensd zou zijn op  $H$ . Dit is een contradictie, waaruit volgt  $u_0 \notin D$ .

Opmerking 2.5.8

Zij  $f \in H$ , dan is  $\ell(u) = (f, u)$  een eenvoudig voorbeeld van een begrensde lineaire operator  $\ell$ .

Stelling 2.5.8 (LAX & MILGRAM)

Zij  $\phi$  een begrensde, positief definitie, bilineaire vorm gedefinieerd op de Hilbertruimte  $D$ , dan bestaat er precies één begrensde lineaire operator  $S$  op  $D$  zodat

$$(2.5.11) \quad (x, y) = \phi(s, Sy) \quad \text{voor alle } x, y \in D.$$

Deze operator heeft een inverse  $S^{-1}$  en er geldt  $\|S\| < \gamma^{-2}$ ,  $\|S^{-1}\| \leq \|\phi\|$ .

Bewijs Zie YOSIDA [1965], p.92-93.  $\square$

Gevolg

Zij  $\phi$  een begrensde, positief definitie, bilineaire vorm op  $D$ , dan bestaat er voor elke begrensde lineaire functionaal  $\ell: D \rightarrow \mathbb{R}$  e.e.s.e. oplossing van

$$(2.5.12) \quad \phi(x, w) = \ell(x) \quad , \quad \text{voor alle } x \in D.$$

Bewijs

M.b.v. de stellingen van Riesz en Lax-Milgram volgt direkt dat er bij iedere  $\ell: D \rightarrow \mathbb{R}$  precies één  $p \in E$  bestaat met

$$\ell(x) = (x, p) = \phi(x, Sp) = \phi(x, w). \quad \square$$

De Ritz-methode

Als  $L$  positief definit is en als  $H$  separabel is, dan kan - volgens opmerking (2.5.3) - uit  $D$  een rij  $\{\phi_n\}$  gekozen worden die volledig is in  $H_L$ . De Ritz-methode bestaat nu daaruit dat het minimum van de functionaal  $E(u)$  niet gezocht wordt op  $H_L$  maar op een  $n$ -dimensionale deelruimte opgespannen door  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ . D.w.z. we schrijven

$$(2.5.13) \quad u_n = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k$$

en we zoeken het minimum van de functie in  $n$  variabelen

$$E(u_n) = (L \sum_{k=1}^n a_k \phi_k, \sum_{k=1}^n a_k \phi_k) - 2(f, \sum_{k=1}^n a_k \phi_k).$$

We zien direkt dat dit leidt tot het lineaire stelsel

$$\sum_{k=1}^n a_k (L\phi_k, \phi_m) = (f, \phi_m) \quad , \quad m = 1(1)n.$$

Als nu de functies  $\phi_k$  lineair onafhankelijk zijn in  $H_L$  dan is dit stelsel eenduidig oplosbaar.

Wanneer in (2.5.13) voor  $a_k$  de oplossing van het stelsel genomen wordt, dan heet  $u_n$  de *Ritz-benadering*. Wanneer  $L$  en  $f$  gegeven zijn en  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$  gekozen is, is deze benadering expliciet te berekenen.

#### Opmerking 2.5.9

Zoals reeds in 2.1 vermeld werd, is de klassieke eindige elementen methode hierin geheel identiek aan de Ritz-methode. Als extra eigenschap geeft de eindige elementen methode bovendien een suggestie voor de keuze van de functies  $\{\phi_n\}$ .

#### Stelling 2.5.9

Als  $L$  positief definit is dan convergeren de Ritz-benaderingen  $u_n$  van het variatie probleem in  $H_L$  en in  $H$  naar de oplossing  $u_0$ .

#### Bewijs

Kies  $\{\phi_k\}_{k=1}^n$  orthonormaal in  $H_L$ , dan geldt  $a_k = (f, \phi_k)$  en dus  $u_n = \sum_{k=1}^n (f, \phi_k) \phi_k$ . Omdat  $\{\phi_n\}$  volledig is volgt

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, \phi_k)_L \phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \phi_k) \phi_k,$$

waardoor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_L = 0.$$

Aangezien  $\|u_n - u_0\| \leq \gamma^{-1} \|u_n - u_0\|_L$  convergeert  $u_n$  naar  $u$  ook in  $H$ .  $\square$

## 2.6. Sobolev-ruimten

In de vorige paragrafen werd enerzijds gesproken in termen van genormeerde lineaire ruimten en Hilbert-ruimten, anderzijds werden voorbeelden gegeven van differentiaaloperatoren die gedefinieerd waren op ruimten van functies die een aantal malen differentieerbaar moeten zijn.

In deze paragraaf zullen we enkele concrete Hilbert-ruimten definiëren welke bestaan uit functies die - in zekere zin - voldoende differentieerbaar zijn. Dit stelt ons in staat preciese formuleringen van problemen en stellingen te geven. Voor een uitgebreide behandeling van o.a. Sobolev-ruimten zij verwezen naar YOSIDA [1965] en LIONS & MAGENES [1968].

Zij  $\Omega$  een meetbare open deelverzameling van de eindigdimensionale Euclidische ruimte  $\mathbb{R}^n$ . De rand van  $\Omega$  geven we aan met  $\partial\Omega$ .

### Definitie 2.6.1

Met  $C^k(\Omega)$ ,  $k$  geheel,  $k \geq 0$ , geven we aan de verzameling der reëelwaardige functies op  $\Omega$  met continue (partiële) afgeleiden tot en met de  $k$ -de orde. Met  $C^k(\bar{\Omega})$  geven we alle functies aan waarvoor de eigenschap uniform geldt.

### Definitie 2.6.2

Met  $C_0^k(\Omega)$  geven we aan de verzameling van alle functies uit  $C^k(\Omega)$  welke een compacte drager in  $\Omega$  bezitten.

### Opmerking 2.6.1

Met de gebruikelijke definities voor het optellen van twee functies en het vermenigvuldigen van een functie met een scalar zijn  $C^k(\Omega)$  en  $C_0^k(\Omega)$  lineaire ruimten.

### Opmerking 2.6.2

Voor een natuurlijk getal  $m \leq k$  en voor een willekeurige compacte drager  $K \subset \Omega$  is de grootheid

$$(2.6.1) \quad \sup_{\substack{|s|=m \\ x \in K}} |D^s f(x)|$$

een seminorm op de lineaire ruimte  $C^k(\Omega)$  of  $C_0^k(\Omega)$ .



Opmerking 2.6.3

We maakten hier gebruik van de z.g. *multiindex-notatie*:  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,  $s_i$  een niet negatief geheel getal;  $|s| = \sum_{i=1}^n s_i$ ;

$$D^s = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{s_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{s_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{s_n} .$$

Aldus wordt met  $D^s$  een  $|s|$ -de orde partiële differentiaal operator aangegeven.

Met  $\mathcal{D}(\Omega)$  geven we de topologische vectorruimte aan die door formule (2.6.1) op  $C_0^\infty(\Omega)$  geïnduceerd wordt.

We zeggen dat een bewering "bijna overal" (b.o.) geldt op een meetbare verzameling  $S$ , wanneer ze geldt op die verzameling  $S$  met uitzondering van een deelverzameling met maat nul.

In het volgende identificeren we een functie  $f$  met de equivalentieklasse van functies welke ontstaat door de equivalentierelatie  $f(s) \sim g(s)$ , als  $f(s) = g(s)$  b.o..

Met  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , geven we aan de verzameling van alle reëelwaardige functies  $f$ , b.o. gedefinieerd op  $\Omega$ , waarvoor

$$\int_{\Omega} |f(s)|^p ds$$

bestaat.

Opmerking 2.6.4

$\|f\|_{0,p} = \left( \int_{\Omega} |f(s)|^p ds \right)^{1/p}$  is een norm op  $L^p(\Omega)$  en met deze norm is  $L^p(\Omega)$  een Banach-ruimte.

Met  $L^\infty(\Omega)$  geven we aan de verzameling van alle reëelwaardige, meetbare functies  $f$ , b.o. gedefinieerd op  $\Omega$ , waarvoor

$$\|f\|_{0,\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{s \in \Omega} |f(s)| = \inf \{ z \mid z \in \mathbb{R}, |f(s)| \leq z \text{ b.o.} \}$$

bestaat.

Opmerking 2.6.5

$\|f\|_{0,\infty}$  is een norm op  $L^\infty(\Omega)$  en met deze norm is  $L^\infty(\Omega)$  een Banach-ruimte.

Opmerking 2.6.6

$(x, y) = \int_{\Omega} x(s)y(s)ds$  is een inproduct op  $L^2(\Omega)$  en met dit inproduct is  $L^2(\Omega)$  een Hilbert-ruimte.

Opmerking 2.6.7

We weten dat  $\mathcal{D}(\Omega)$  dicht ligt in iedere Banach-ruimte  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Voor een willekeurig geheel getal  $k \geq 0$  en voor elke  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , wordt een Sobolev-ruimte  $W^{k,p}(\Omega)$  gedefinieerd als de verzameling van alle functies die, tezamen met hun distributionele afgeleiden tot en met de  $k$ -de orde, tot de ruimte  $L^p(\Omega)$  behoren; ofwel

$$(2.6.2) \quad W^{k,p}(\Omega) = \{f \mid D^s f \in L^p(\Omega), 0 \leq |s| \leq k\}.$$

Een seminorm op  $W^{k,p}(\Omega)$  wordt gedefinieerd door

$$(2.6.3) \quad |f|_{k,p} = \left( \sum_{|s|=k} \int_{\Omega} |D^s f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Een norm voor  $W^{k,p}(\Omega)$  wordt gedefinieerd door

$$(2.6.4) \quad \|f\|_{k,p} = \left( \sum_{0 \leq |s| \leq k} \int_{\Omega} |D^s f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Met deze norm is  $W^{k,p}(\Omega)$  een Banach-ruimte.

In het bijzonder worden voor  $p = 2$  de volgende notaties gebruikt

$$W^{k,2}(\Omega) = W^k(\Omega) = H^k(\Omega)$$

en

$$\|f\|_{k,2} = \|f\|_k.$$

Op  $W^{k,2}(\Omega)$  kan een inproduct gedefinieerd worden door

$$(2.6.5) \quad (x, y)_k = \sum_{0 \leq |s| \leq k} \int_{\Omega} D^s x(t) D^s y(t) dt.$$

Met dit inproduct is  $W^{k,2}(\Omega)$  een Hilbert-ruimte. In het bijzonder noteren we  $\|f\| = \|f\|_0$  en  $(x, y) = (x, y)_0$ . Ook voor de lineaire deelruimte van alle

functies uit  $C^k(\Omega)$  of  $C_0^k(\Omega)$ ,  $k < \infty$ , waarvoor geldt

$$(2.6.6) \quad \|f\|_k = \left( \sum_{0 \leq |s| \leq k} \int_{\Omega} |D^s f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

is  $(x, y)_k$  een inproduct (en daarmee  $\|f\|_k$  een norm).

Uit de definitie van  $H^k(\Omega)$  volgt direct

$$C_0^\infty(\Omega) \subset H^k(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

en het is duidelijk dat de injectieve afbeeldingen

$$\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow H^k(\Omega) \rightarrow H^m(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

continu zijn.

Het kan worden aangetoond dat  $C^\infty(\Omega)$  dicht ligt in  $H^k(\Omega)$  als  $\Omega$  een begrensd gebied is. D.w.z. ieder element uit  $C^\infty(\Omega)$  waarvoor (2.6.6) geldt, kan worden opgevat als element van  $H^k(\Omega)$  en in de norm  $\|\cdot\|_k$  kan een element van  $H^k(\Omega)$  willekeurig dicht benaderd worden door elementen uit  $C^\infty(\Omega)$ .

Hieruit volgt dat  $H^k(\Omega)$  de afsluiting is in de norm  $\|\cdot\|_k$  van alle functies uit  $C^\infty(\Omega)$  waarvoor geldt dat de norm  $\|\cdot\|_k$  eindig is.

Met  $H_0^k(\Omega)$  wordt aangegeven de completering van  $C_0^\infty(\Omega)$  in de norm  $\|\cdot\|_k$ .

In het algemeen geldt

$$H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega),$$

maar men kan bewijzen dat

$$H_0^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n).$$

Ook met een negatief geheel getal als bovenindex geeft men betekenis aan de notatie  $H^k(\Omega)$ : met  $k > 0$  is  $H^{-k}(\Omega)$  de duale ruimte van  $H_0^k(\Omega)$ , d.w.z.  $H^{-k}(\Omega)$  is de ruimte van alle begrensde lineaire operatoren op  $H_0^k(\Omega)$ .

### Definitie 2.6.3

We noemen een gebied  $\Omega$   $k$ -regulier als voor de rand  $\partial\Omega$  geldt:  $\partial\Omega$  is een  $k$  maal continu differentieerbare varieteit van dimensie  $k-1$ , en het gebied  $\Omega$  bevindt zich aan één kant van  $\partial\Omega$ ,

Stelling 2.6.1 (Spoortheorema)

Laat  $\Omega$  een open deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  zijn en  $k$ -regulier, dan bestaan er  $k$  continue lineaire afbeeldingen  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$  van  $H^k(\Omega)$  op  $L^2(\partial\Omega)$  - d.i. de verzameling van alle kwadratisch integreerbare functies op  $\partial\Omega$  m.b.t. de oppervlakte maat  $d\sigma$  - zodat voor iedere  $u$  die  $k$  maal continu differentieerbaar is op  $\bar{\Omega}$  geldt

$$\begin{aligned} \gamma_0 u &= u && \text{op } \partial\Omega, \\ \gamma_s u &= \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^s u && \text{op } \partial\Omega \quad (s = 1, 2, \dots, k-1). \end{aligned}$$

Hierin is  $\nu$  de vector in  $\mathbb{R}^n$  welke loodrecht staat op  $\partial\Omega$  en naar het buitengebied van  $\Omega$  wijst.

$H_0^k(\Omega)$  is de kern van de afbeelding

$$\gamma_0 \times \gamma_1 \times \dots \times \gamma_{k-1},$$

d.w.z. voor  $u \in H^k(\Omega)$  geldt

$$u \in H_0^k(\Omega) \iff \forall s \in \{0, 1, \dots, k-1\} \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^s u = 0.$$

Bewijs Zie LIONS & MAGENES [1968], p.68, th.11.5.  $\square$

Opmerking 2.6.8

$\gamma_j H^k(\Omega)$  is niet de gehele ruimte  $L^2(\partial\Omega)$  maar een deelruimte van  $L^2(\partial\Omega)$ . Van belang is vooral de ruimte  $\gamma_0 H^1(\Omega)$  welke wordt aangegeven met  $L^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

Stelling 2.6.2 (Sobolev's lemma)

Zij  $\Omega$  een begrensde open deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  en  $k$ -regulier, laat  $m$  een geheel getal zijn,  $m > k + n/2$ . Dan geldt voor iedere  $u \in H^m(\Omega)$  dat er een  $w \in C^k(\bar{\Omega})$  bestaat zodat  $u = w$  b.o..

Meestal geven we dit - minder nauwkeurig - aan met

$$H^m(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega}), \quad \text{als } m > k + n/2.$$

Opmerking 2.6.9

Dergelijke inclusiestellingen kunnen ook gegeven worden voor de algemenere Sobolev-ruimten  $W^{k,p}(\Omega)$ . Voor niet-negatieve gehele getallen  $k, j, k \geq j$  geldt

$$(i) \text{ als } \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} > 0,$$

$$\text{dan } W^{k,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega),$$

$$\text{d.i. } \|u\|_{j,q} \leq C(j,k,p,q) \|u\|_{k,p} \text{ voor alle } u \in W^{k,p}.$$

$$(ii) \text{ Als } \frac{1}{p} < \frac{k-j}{n},$$

$$\text{dan } W^{k,p}(\Omega) \subset C^j(\Omega),$$

$$\text{d.i. } \|u\|_{C^j(\Omega)} \leq C(j,k,p) \|u\|_{k,p}.$$

2.7. Natuurlijke en essentiële randvoorwaarden

We beschouwen, evenals in paragraaf 2.4, de differentiaalvergelijking

$$(2.7.1) \quad -D(pDu) + qu = k,$$

gedefinieerd op  $I = [a,b]$ , met de randvoorwaarden

$$-Du(a) + \alpha u(a) = \beta,$$

$$Du(b) + \gamma u(b) = \delta.$$

We nemen aan dat  $p \in C^1[a,b]$ ,  $q \in C^0[a,b]$ ,  $k \in L^2[a,b]$  en bovendien dat  $p \geq p_0 > 0$ ,  $q \geq 0$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$  en niet  $\alpha = \gamma = 0$ . Dit is een randwaardeprobleem met gemengde randvoorwaarden, d.w.z. in de randvoorwaarden komen zowel  $Du$  als  $u$  voor. Een randvoorwaarde van de vorm  $Du(x_b) = \delta$ , waarin  $u$  niet voorkomt heet *Neumann-randvoorwaarde*.

N.B. Met  $\alpha$  (resp.  $\gamma$ ) gelijk aan nul zijn in bovenstaande formulering Neuman-randvoorwaarden inbegrepen. Een randvoorwaarde van de vorm  $u(x_b) = v$ , waarin  $Du$  niet voorkomt, heet *Dirichlet-randvoorwaarde*. In de bovenstaande formulering is deze soort randvoorwaarden uitgesloten.

We schrijven het randwaardeprobleem (2.7.1)-(2.7.2) in de operatorvorm

$$Lu = f$$

door middel van de operator

$$(2.7.3) \quad L \cdot \equiv -D(pD \cdot) + q.$$

Deze operator is gedefinieerd voor alle  $u \in C^2[a,b]$ . De oplossing  $u$  van ons probleem moet echter gevonden worden in de deelverzameling van  $C^2[a,b]$  die voldoet aan (2.7.2). Deze deelverzameling is echter geen lineaire ruimte wanneer niet  $\beta = 0$  en  $\delta = 0$ . We kiezen nu, alleen voor theoretische doeleinden, een willekeurige functie  $w_0 \in C^2[a,b]$  die voldoet aan (2.7.2). We kunnen nu schrijven  $u = w + w_0$ . Om  $u$  te bepalen moet nu een  $w \in C^2[a,b]$  gevonden worden die voldoet aan

$$(2.7.4) \quad Lw = k - Lw_0 = f,$$

$$(2.7.5) \quad \begin{cases} -Dw(a) + \alpha w(a) = 0, \\ Dw(b) + \gamma w(b) = 0. \end{cases}$$

De deelverzameling van alle  $w \in C^2[a,b]$  die voldoen aan (2.7.5), is *wel* een lineaire deelruimte van  $C^2[a,b]$ ; deze geven we aan met  $C_B^2[a,b]$ . Het probleem is nu gereduceerd tot het vinden van een  $w \in C_B^2[a,b]$  zodat  $Lw = f$ .

Als grondruimte (pivot space)<sup>H</sup> voor ons probleem nemen we  $L^2[a,b]$ . Voor het definitiegebied  $D$  van de operator  $L$  nemen we  $C_B^2[a,b]$ . Dit definitiegebied ligt dicht in  $H$ ; we weten namelijk dat

$$(2.7.6) \quad C_0^\infty[a,b] \subset C_B^2[a,b] \subset L^2[a,b]$$

in elkaar dichte deelverzamelingen zijn.

Omdat  $p, q \in C^0[a,b]$  bestaan er  $p_1, q_1 > 0$  zodat  $p_1 \geq p \geq p_0$  en  $q_1 \geq q \geq 0$ . Hierdoor is  $L$  een begrensde lineaire operator  $D \rightarrow H$ .

De operator  $L$  is bovendien symmetrisch:

$$(2.7.7) \quad \begin{aligned} (Lw, v) &= \int_a^b [-D(pDw)v + qwv] dx = \\ &= \int_a^b [p Dw Dv + qwv] dx + [\alpha pwv](a) + [\gamma pwv](b). \end{aligned}$$

Het rechterlid van (2.7.7) is symmetrisch in  $u$  en  $v$  zodat

$$(2.7.8) \quad (Lw, v) = (w, Lv).$$

Wanneer we in de ongelijkheid (2.7.7)  $w = v$  nemen, dan blijkt  $L$  ook positief definitief:

$$(2.7.9) \quad \begin{aligned} (Lw, w) &= \int_a^b p(Dw)^2 + qw^2 dx + [\alpha pw^2](a) + [\alpha pw^2](b) \geq (\text{Poincaré}) \geq \\ &\geq \frac{p_0}{2(b-a)} * \min\left(\frac{1}{b-a}, \max(\alpha, \gamma)\right) * \|w\|^2. \end{aligned}$$

$L$  is dus positief definitief.

Nu  $L$  symmetrisch en positief definitief blijkt te zijn kunnen we de energieruimte  $H_L$  introduceren. Volgens stelling (2.5.6) geldt  $H_L \subset L_2[a, b]$ .

Uit welke functies bestaat nu de ruimte  $H_L$ ? In de eerste plaats bevat deze ruimte  $C_B^2[a, b]$  en vervolgens alle functies die als limietfuncties van  $C_B^2[a, b]$ -functies beschouwd kunnen worden in de energienorm  $\|\cdot\|_L$ :

$$(2.7.10) \quad \|w\|_L^2 = \int_a^b p(Dw)^2 + qw^2 dx + [\alpha pw^2](a) + [\gamma pw^2](b).$$

Lemma 2.7.1

Voor de operator  $L$ , gedefinieerd door (2.7.4), (2.7.5) zijn de normen  $\|\cdot\|_L$  en  $\|\cdot\|_1$  equivalent.

Bewijs

Uit (2.7.9) volgt  $\|w\|_L^2 \geq p_0 \|Dw\|^2$  en  $\|w\|_L^2 \geq \|w\|_L^2 \geq K \|w\|_1^2$ , zodat

$$(2.7.11) \quad \|w\|_L^2 > K_1 \|w\|_1^2.$$

Anderzijds volgt uit (2.7.10)

$$\|w\|_L^2 \leq \max(p_1, q_1) \|w\|_1^2 + |\alpha p(a)w(a)^2| + |\gamma p(b)w(b)^2|$$

en uit opmerking (2.6.9) volgt

$$|\alpha p(a)w(a)^2| + |\gamma p(b)w(b)^2| \leq K_2 \|w\|_1^2,$$

zodat

$$(2.7.12) \quad \|w\|_L^2 \leq K_3 \|w\|_1^2.$$

Uit (2.7.11) en (2.7.12) volgt de equivalentie.  $\square$

Zoals beschreven werd in de vorige paragraaf, kan de betekenis van  $(Lw, w)$  nu worden uitgebreid van  $w \in C_B^2[a, b]$  tot  $w \in H^1[a, b]$ . De oplossing van  $Lw = f$  is dus het minimaliserend element uit  $H^1[a, b]$  van

$$(2.7.13) \quad (Lw, w) - 2(f, w).$$

De functie  $w_0$  (zie (2.7.4)) behoort tot  $C^2[a, b]$  en daarmee tot  $H^1[a, b]$ , zodat de oplossing  $u$  van de vergelijking  $Lu = k$  het minimaliserend element is van

$$(L(u-w_0), (u-w_0)) - 2(f, (u-w_0)).$$

Met behulp van (2.7.4) leiden we nu af dat  $u$  het minimaliserend element is, in  $H^1[a, b]$ , van

$$(2.7.14) \quad (Lu, u) - 2(k, u) - (Lw_0, w_0) + 2(k, w_0).$$

Deze kwadratische functionaal komt overeen met  $E(u)$  in vergelijking (2.4.12).

#### Opmerking 2.7.1

Het is een groot praktisch voordeel dat de klasse van functies zo uitgebreid is. We kunnen nu de benadering van de oplossing  $u$  zoeken in een eindigdimensionale deelruimte van  $H^1[a, b]$ . Het is nu bijvoorbeeld mogelijk  $u$  te benaderen met stuksgewijs lineaire functies.

#### Opmerking 2.7.2

We zien, dat aan de ruimte waarover geminimaliseerd wordt geen beperking wordt opgelegd door de randvoorwaarden (2.7.2). Deze randvoorwaarden zijn z.g. *natuurlijke randvoorwaarden* waaraan blijkbaar automatisch voldaan wordt door het minimum  $u$  uit  $H_L$ . Anders ligt de zaak, wanneer we aan één (of twee) van de randen i.p.v. een gemengde randvoorwaarde, een Dirichlet-randvoorwaarde opleggen. We merken op dat deze randvoorwaarde niet door (2.7.2) geïmpliceerd wordt. We kunnen zo'n randvoorwaarde probleem met een Dirichlet-voorwaarde, bijv. (2.7.1), (2.7.2)), namelijk voor  $\alpha, \beta \rightarrow \infty$  met  $\beta/\alpha = \nu$ . We zien aan de functionaal  $E(u)$  (vergl. 2.4.12) dat de termen



$$(2.7.12) \quad \alpha p(a)u^2(a) - 2\beta p(a)u(a)$$

een extra groot gewicht krijgen voor  $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ . Opdat  $E(u)$  geminimaliseerd wordt zal dus in de eerste plaats voldaan moeten worden aan de eis dat (2.7.12) minimaal is. Dit is equivalent met

$$(2.7.13) \quad u(a) = v.$$

Wanneer hieraan voldaan is, moet u verder zodanig worden gevonden dat

$$(2.7.14) \quad \int_a^b (p(Du)^2 + qu^2 - 2fu) dx + p(b)(\gamma u^2(b) - w\delta u(b))$$

minimaal is.

In dit geval van een Dirichlet-randvoorwaarde zoeken we het minimaliserende element over slechts die elementen  $u$  uit  $H^1[a, b]$  waarvoor  $u(a) = v$  zo'n randvoorwaarde, die een eis stelt aan de ruimte waarin de oplossing van het minimaliseringsprobleem gezocht moet worden, heet (in tegenstelling tot een natuurlijke) een *essentiële randvoorwaarde*.

### Opmerking 2.7.3

Uit het spoor theorema (stelling 2.6.1) volgt dat, voor elliptische problemen van de orde  $2m$ , voorwaarden voor de  $k$ -de orde afgeleiden op de rand, optreden als essentiële randvoorwaarden, als  $0 \leq k \leq m-1$  en als natuurlijke randvoorwaarden, als  $m \leq k \leq 2m-1$ .

## 2.8. De eindige elementenmethode voor een tweepunts randwaardeprobleem

In deze sectie laten we, aan de hand van het probleem (2.7.1)-(2.7.2), zien hoe met de eindige elementen methode een randwaardeprobleem in één dimensie opgelost kan worden. We gaan hierbij uit van de kwadratische functionaal (2.4.12). Gemotiveerd door de theorie uit de vorige paragrafen, gebruiken we de Ritz-methode en we minimaliseren over eindigdimensionale deelruimten van  $H^1[a, b]$ .

De benaderende functie  $u_h$  wordt geschreven als

$$(2.8.1) \quad u_h = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i.$$

We moeten de bij het probleem behorende functionaal, de energie  $E(u_h)$ , mini-

maliseren. Deze is een functie van de  $N+1$  variabelen  $a_0, a_1, \dots, a_N$ . Volgens de vergelijking (2.4.12) is de energie gelijk aan

$$(2.8.2) \quad E(u_h) = \sum_{i,j=0}^N a_i a_j [\alpha p(a) \phi_i(a) \phi_j(a) + \gamma p(b) \phi_i(b) \phi_j(b) + \int_a^b p D\phi_i D\phi_j + q \phi_i \phi_j \, dx] - 2 \sum_{j=0}^N a_j [\beta p(a) \phi_j(a) + \delta p(b) \phi_j(b) + \int_a^b f \phi_j \, dx].$$

Het minimum wordt bepaald door het stelsel lineaire algebraïsche vergelijkingen

$$(2.8.3) \quad \sum_{i=0}^N a_i [\alpha p(a) \phi_i(a) \phi_j(a) + \gamma p(b) \phi_i(b) \phi_j(b) + \int_a^b p D\phi_i D\phi_j + q \phi_i \phi_j \, dx] = \beta p(a) \phi_j(a) + \delta p(b) \phi_j(b) + \int_a^b f \phi_j \, dx, \quad \text{voor } j = 0, 1, \dots, N.$$

De keuze van de functies  $\{\phi_i\}$  bepaalt nu de oplossing  $u_h$ . Volgens de theorie moeten de functies  $\phi_i$  aan drie eisen voldoen:

- (i) alle  $\phi_i$  moeten tot  $H^1[a, b]$  behoren;
- (ii) alle  $\phi_i$  uit  $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$  moeten lineair onafhankelijk zijn in  $H_L$ ;
- (iii) de rij  $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$  moet volledig zijn in  $H_L$  (opdat  $\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u$ ).

In de praktijk moet de keuze van de functies  $\phi_i$  ook zodanig zijn dat (1) de elementen van de matrix en van het rechterlid van het stelsel (2.8.3) eenvoudig te berekenen zijn, en (2) dat de oplossing van het stelsel zonder teveel moeite berekend kan worden.

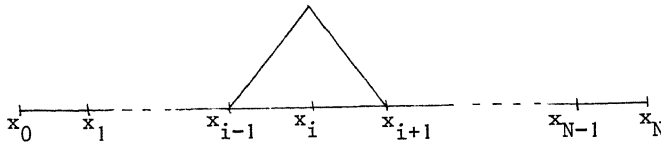
Een groot aantal alternatieven is hier mogelijk voor de keuze  $\{\phi_i\}$ . Een aantal hiervan zal in het volgende hoofdstuk behandeld worden. We zullen hier een eenvoudige keuze maken: voor de eindigdimensionale deelruimte van  $H^1[a, b]$  kiezen we een ruimte van stuksgewijs lineaire functies.

Het interval  $[a, b]$  wordt verdeeld in  $N$  subintervallen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Voor iedere  $i$ ,  $0 \leq i \leq N$ , definiëren we  $\phi_i$ , zodat

- (i)  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ;
- (ii)  $\phi_i(x)$  lineair is op ieder subinterval  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1(1)N$ .



Figuur 2.3 Grafiek van  $\phi_i(x)$ .

Alle stuksgewijs lineaire functies  $v_h$  op  $[a, b]$ , met knooppunten  $x_i$ , kunnen nu geschreven worden als

$$v_h(x) = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i(x)$$

en er geldt

$$v_h(x_j) = a_j.$$

Deze functies  $\phi_i$  voldoen aan de eisen (i)-(iii) wanneer geldt dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_j |x_j - x_{j-1}| = 0.$$

Met deze keuze van  $\{\phi_i\}$  kan het lineaire stelsel (2.8.3) geschreven worden als een matrix-vergelijking

$$Ax = b,$$

waarin

$$(2.8.4) \quad A_{ij} = \alpha p(a) \delta_{i0} \delta_{j0} + \gamma p(b) \delta_{iN} \delta_{jN} + \int_a^b p D \phi_i D \phi_j + q \phi_i \phi_j \, dx,$$

$$(2.8.5) \quad b_j = \beta p(a) \delta_{j0} + \delta p(b) \delta_{jN} + \int_a^b f \phi_j \, dx.$$

We zien direkt dat alle matrixelementen o.a. bestaan uit een term

$$a_{ij} = \int_a^b p D \phi_i D \phi_j + q \phi_i \phi_j \, dx.$$

Deze term is gelijk aan nul als  $|i-j| > 1$  zodat de matrix  $(a_{ij})$  een tri-diagonale matrix is. Slechts op twee plaatsen verschillen  $A_{ij}$  en  $a_{ij}$ . Aan het 0-de en N-de element van de hoofddiagonaal wordt een randvoorwaarde-term toegevoegd:

$$A_{00} = a_{00} + \alpha p(a), \quad A_{NN} = a_{NN} + \gamma p(b).$$

De term

$$(2.8.6) \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} p D\phi_i D\phi_j + q \phi_i \phi_j \, dx$$

kan worden geschreven als de som van N integralen (over elk element of subinterval één integraal), waarvan er overigens maar één of twee ongelijk aan nul zijn.

Op analoge wijze bestaat het rechterlid uit vector elementen van de vorm

$$(2.8.7) \quad b_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \phi_j \, dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi_j \, dx.$$

Aan het 0-de en N-de element worden nog de randvoorwaarde-termen  $\beta p(a)$  resp.  $\delta p(b)$  toegevoegd. Zoals behandeld zal worden in hoofdstuk 3, is de samenstelling van deze matrix op eenvoudige wijze automatisch te verwezenlijken.

#### Opmerking

De matrix van het lineaire stelsel is symmetrisch en positief definit.

#### Opmerking

Ook het *implementeren van een essentiële randvoorwaarde* is eenvoudig automatisch uit te voeren. Wil men bijvoorbeeld de randvoorwaarde  $u_h(a) = v$  opleggen, dan kan dit gerealiseerd worden door in de matrix en het rechterlid de volgende substituties uit te voeren:

$$b_0 = v \\ A_{0j} = \delta_{0j}.$$

### 2.9. Foutschattingen

Nu we in paragraaf 2.8 de constructie van het discrete probleem gegeven hebben, blijft er een zeer belangrijke vraag over: Hoe dicht ligt de eindige elementen benadering  $u_h$  bij de exacte oplossing  $u$ ? Bovendien willen we weten hoe snel  $u_h$  naar  $u$  convergeert.

In de volgende stelling zullen we aantonen dat de eindige elementen benadering optimaal is in de norm  $\|\cdot\|_L$ . Dat wil zeggen dat  $u_h$  juist de functie uit  $V_h$  is die de afstand  $\|u-u_h\|_L$  minimaliseert. We merken op dat  $\|\cdot\|_L$  juist een norm is die door de operator  $L$  wordt geïnduceerd;  $\|u\|_L^2$  is precies het zuiver kwadratisch gedeelte van de energie-functionaal

$$E(v) = \|v\|_L^2 - 2(f,v)_0.$$

### Stelling 2.9.1

Als u de functionaal  $(Lv,v) - 2(f,v)$  minimaliseert over  $V = H_L$  en  $V_h$  is een gesloten deelruimte van  $V$ , dan gelden de volgende drie beweringen.

(i) Het minimum van  $E(v)$  en het minimum van  $\|u-v\|_L$ , met  $v \in V_h$ , worden aangenomen door dezelfde functie  $u_h \in V_h$ , zodat

$$(2.9.1) \quad \|u-u_h\|_L = \min_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_L.$$

(ii) In  $H_L$  is  $u_h$  de projectie van  $u$  op  $V_h$ :

$$(2.9.2) \quad (u-u_h, v_h)_L = 0, \quad \text{voor alle } v_h \in V_h.$$

(iii) De minimaliserende functie  $u_h$  voldoet aan

$$(2.9.3) \quad (u_h, v_h)_L = (f, v_h)_0, \quad \text{voor alle } v_h \in V_h.$$

### Gevolg 2.9.1

In het bijzonder volgt uit (2.9.3) met  $V_h = H_L$  dat

$$(2.9.4) \quad (u, v)_L = (f, v)_0, \quad \text{voor alle } v \in H_L.$$

### Gevolg 2.9.2

Uit (2.9.2) volgt

$$(2.9.5) \quad \|u-u_h\|_L^2 = (u, u_h)_L - \|u_h\|_L^2 = \|u\|_L^2 - \|u_h\|_L^2.$$

### Bewijs

Het bewijs van (2.9.3) verloopt analoog aan het bewijs van stelling 2.5.3;

voor alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v_h \in V_h$  geldt namelijk

$$0 \leq E(u_h - \lambda v_h) - E(u_h) = \lambda [2(u_h, v_h)_L - 2(f, v_h)_0 + \lambda (v_h, v_h)_L],$$

zodat

$$(u_h, v_h)_L = (f, v_h)_0, \quad \text{voor elke } v_h \in V_h.$$

Dit bewijst (2.9.3). Het bewijs van (2.9.2) volgt direkt door aftrekken van (2.9.3) en (2.9.4) met  $v \in V_h$ . Nu volgt (2.9.1) vanwege

$$\|u - u_h - v_h\|_L^2 = \|u - u_h\|_L^2 - 2(u - u_h, v_h)_L + \|v_h\|_L^2 = \|u - u_h\|_L^2 + \|v_h\|_L^2,$$

zodat

$$\|u - u_h - v_h\|_L^2 \geq \|u - u_h\|_L^2. \quad \square$$

#### Opmerking 2.9.1

In de praktijk wordt  $V_h$  altijd eindigdimensionaal genomen. Hierdoor is  $V_h$  gesloten, hetgeen het bestaan van een minimaliserend element garandeert.

#### Opmerking 2.9.2

Stelling 2.9.1. houdt in dat, met betrekking tot het energie-inproduct  $(\cdot, \cdot)_L$  de Ritz-benadering  $u_h$  de projectie is van  $u$  op  $V_h$ . Hierdoor wordt het afschatten van de fout teruggebracht tot het afschatten van de afstand van een functie  $u \in V = H^1[a, b]$  tot een functieruimte  $V_h \subset V$ . We kunnen dit schrijven als

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_L &\leq K_1 \|u - u_h\|_1 \leq K \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 = \\ &= K \| [u] \|_{H^1[a, b]/V_h}. \end{aligned}$$

Hier is  $H^1[a, b]/V_h$  de quotientruimte van  $H^1[a, b]$  over  $V_h$ .

De convergentiesnelheid van de eindige elementen methode hangt af van de orde waarmee de oplossing kan worden benaderd door de "trial space"  $V_h$ , die bestaat uit stuksgewijs polynomen. Zo wordt het oorspronkelijk probleem

gereduceerd tot een approximatie-theoretisch probleem: Hoe goed kan een ruimte  $V_h$  een ruimte  $H^k[a,b]$  benaderen. Aan dit probleem is paragraaf 2.10 gewijd.

We willen hier stelling 2.9.1 toepassen om een fout-schatting te vinden voor de eindige elementen benadering  $u_h$  van de oplossing van het tweepunts randwaardeprobleem uit paragraaf 2.4. We nemen aan dat  $u_h$  berekend is met behulp van de "dak-functies" zoals beschreven in paragraaf 2.8. Hiertoe definiëren we de foutfunctie  $e_h$  door

$$e_h = u_h - u.$$

We weten

$$\|e_h\|_L \leq \|u - v_h\|_L, \quad \text{voor alle } v_h \in V_h.$$

In de  $H_L$ -norm wordt  $u$  dus niet slechter benaderd dan de beste interpolerende, stuksgewijs lineaire, functie. Op grond hiervan kunnen we eerst trachten met conventionele middelen een fout-schatting te geven.

Wanneer een functie  $u \in C^2[a,b]$  benaderd wordt door een interpolerende, stuksgewijs lineaire functie  $u_I$ , is het aan de hand van een lokale Taylor-reeks-ontwikkeling, zeer eenvoudig te zien dat

$$\max_{x \in [a,b]} |u(x) - u_I(x)| \leq \frac{1}{2} h^2 \max_{x \in [a,b]} |u''(x)|,$$

$$\max_{x \in [a,b]} |u'(x) - u_I'(x)| \leq h \max_{x \in [a,b]} |u''(x)|.$$

Wanneer we dit substitueren in (2.7.10), blijkt dat

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|_L^2 &= \int_a^b p(u' - u_I')^2 + q(u - u_I)^2 dx + \\ (2.9.6) \quad &+ [\alpha p(u - u_I)^2](a) + [\gamma p(u - u_I)^2](b) \leq \\ &\leq K h^2 \max_{x \in [a,b]} |u''(x)|^2. \end{aligned}$$

Voor de  $H_L$ -norm van de fout vinden we dus

$$\|u - u_I\|_L \leq K h \max |u''(x)|^2.$$

Waar hier een globale schatting gegeven wordt voor de fout (de linkerzijde van de ongelijkheid zegt niets over de puntsgewijze fout) lijkt de puntsgewijze norm aan de rechterzijde misplaatst. Om een foutschatting in termen van een globale norm te krijgen moeten we echter gebruik maken van stelling 2.10.1.

### Stelling 2.9.2

Voor de eindige elementenbenadering met stuksgewijs lineaire functies, van het probleem (2.4.10), geldt de foutschatting

$$(2.9.7) \quad \|u - u_h\|_L \leq K \cdot \|u''\|_0 \cdot h.$$

### Bewijs

Uit stelling 2.10.1 volgt, met  $p = 2$ ,  $k = 1$ ,  $0 \leq m \leq 2$

$$\|u - u_I\|_m \leq K |u|_2 h^{2-m},$$

zodat

$$\|u - u_I\|_1 \leq K \|u''\|_0 h.$$

Wanneer we gebruik maken van het feit dat de norm  $\|\cdot\|_1$  equivalent is met  $\|\cdot\|_L$  (zie lemma 2.7.1) dan blijkt (2.9.8) direkt.  $\square$

### Gevolg 2.9.3

We kunnen ook gebruik maken van de regulariteit van de oplossing (zie bijv. FRIEDMAN [1969])

$$(2.9.8) \quad \|u\|_2^2 \leq K(\|f\|_0^2 + \beta^2 + \delta^2),$$

waarmee we de fout in de berekening van  $u$  kunnen schatten in termen van het rechterlid:

$$(2.9.9) \quad \|u - u_h\|_L \leq K \cdot h \cdot \{\|f\|_0 + \beta + \delta\}.$$



Opmerking 2.9.3

Dat de eindige elementenbenadering voor elke  $f \in H^0$  convergeert in de energienorm is een direkt gevolg van het feit dat een volledige rij functies  $\{\phi_i\}$  in  $H_L$  gekozen wordt als basisfuncties voor de methode. Over de convergentiesnelheid kan echter niet direkt een uitspraak worden gedaan.

Stelling 2.9.3

Voor elke  $u \in H^1[a,b]$  (d.w.z.  $f \in H^0$ ) convergeert de eindige elementenmethode in de energienorm (dus ook als  $u''$  niet overal bestaat).

Bewijs.

$C_B^2[a,b]$  ligt dicht in  $H_L$ . Voor elke  $u \in H^1[a,b]$  bestaat er dus een rij  $\{v_N\} \subset C_B^2[a,b]$  zodat  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|v_N - u\|_L = 0$ . Uit stelling (2.9.3) blijkt  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \|v_N^h - v_N\|_L = 0$  en dus geldt, vanwege

$$\|u_h - u\|_L \leq \|v_N^h - u\|_L \leq \|v_N^h - v_N\|_L + \|v_N - u\|_L,$$

dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_L = 0. \quad \square$$

De fout in de  $H^0$ -norm

We hebben nu schattingen in  $H_L$ , en daarmee in  $H^1$ , gevonden. We willen nu nagaan welke schatting in  $H^0$  gevonden kan worden.

Met de ongelijkheid van Poincaré

$$|v(x_0) - v(a)| \leq \sqrt{b-a} \|v\|_1, \quad x_0 \in [a,b],$$

kunnen we eenvoudig zien dat, *uniform* op  $[a,b]$ ,

$$|u - u_h| = O(h).$$

In de volgende stelling tonen we echter aan dat in de  $H^0$ -norm de convergentie niet  $O(h)$  is, maar  $O(h^2)$ .

Opmerking 2.9.4

We weten wel dat, voor een interpolerende functie  $u_I$ ,

$$\|u - u_I\|_0 \leq \frac{h^2}{(b-a)^2} \|u''\|_0.$$

De Ritz-methode is echter niet optimaal in  $H^0$ , zodat *niet* geldt

$$\|u - u_h\|_0 \leq \|u - v\|_0, \quad \text{voor alle } v \in H^0[a, b].$$

Stelling 2.9.2

Voor de stuksgewijs lineaire eindige elementenbenadering geldt de volgende fout-schatting

$$(2.9.10) \quad \|u - u_h\|_0 \leq K \|u''\|_0 h^2.$$

Bewijs (zie ook STRANG & FIX [1973], p.49)

Voor het bewijs introduceren we een functie  $z$ , die de oplossing is van  $Lz = u_h - u$ . Nu geldt

$$(Lz, v) = (u_h - u, v), \quad \text{voor alle } v \in H_L,$$

i.h.b.

$$\|u_h - u\|_0^2 = (Lz, u_h - u) = (z, u_h - u)_L.$$

Uit stelling 2.9.1 volgt

$$(v_h, u_h - u)_L = 0, \quad \text{voor alle } v_h \in V_h,$$

zodat

$$\|u_h - u\|_0^2 = (z - v_h, u_h - u)_L \leq \|z - v_h\|_L \|u - u_h\|_L \quad \text{voor alle } v_h \in V_h.$$

Uit (2.9.7) volgt

$$\|u - u_h\|_L^2 \leq K^2 \|u''\|_0^2 h^2 ,$$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|z - v_h\|_L^2 \leq K^2 \|z''\|_0^2 h^2 ,$$

zodat

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq K^2 \|u''\|_0 \|z''\|_0 h^2 .$$

Uit de regulariteits eigenschap (2.9.8) volgt

$$\|z''\|_0^2 \leq \|z\|_2^2 \leq K_R^2 \|u_h - u\|_0^2 ,$$

zodat

$$\|u - u_h\|_0 \leq K^2 \|u''\|_0 K_R h^2 . \quad \square$$

#### Opmerking 2.9.5

Wanneer we de regulariteits eigenschap (2.9.8) nogmaals toepassen krijgen we

$$\|u - u_h\|_0 \leq K_R^{2-2} h^2 (\|f\|_0^{2+\beta^2+\delta^2})^{\frac{1}{2}} .$$

#### 2.10. Interpolatie voor Sobolev-ruimten

In deze paragraaf vermelden we hoe goed Sobolev-ruimten door ruimten van stuksgewijs polynomen benaderd kunnen worden. We geven hier de theorie op een abstracte wijze. Enerzijds heeft dit misschien het nadeel dat niet direkt de belangrijkste praktische implicaties gezien worden. Anderzijds heeft dit het voordeel dat alle speciale gevallen, zoals die in de praktijk gebruikt worden, in deze theorie ondergebracht kunnen worden. In hoofdstuk 3 zullen toepassingen van deze theorie behandeld worden, in het bijzonder Lagrange en Hermite interpolatie. De theorie die hier gegeven wordt is voornamelijk gebaseerd op het werk van BRAMBLE & HILBERT [1970] en vele anderen. In grote lijnen volgen wij hier de uiteenzetting zoals die gegeven wordt door CIARLET & RAVIART [1972].

Het belangrijkste resultaat van deze paragraaf is de volgende stelling.

Stelling 2.10.1

Wanneer een approximatie-schema als volgt wordt gedefinieerd: bij een gegeven open begrensde deelverzameling  $\Omega$  uit  $\mathbb{R}^n$ , voegen we aan een willekeurige functie uit de Sobolev-ruimte  $W^{k+1,p}(\Omega)$  een eenduidige "interpolatie"  $\Pi u$  toe. Wanneer  $\Pi$  alle polynomen van een graad kleiner of gelijk aan  $k$  invariant laat, dan geldt voor alle  $m$ ,  $0 \leq m \leq k+1$ ,

$$(2.10.1) \quad \|u - \Pi u\|_{m,p} \leq K(k,p) |u|_{k+1,p} \frac{h^{k+1}}{\rho^m},$$

waarin

$$(2.10.2) \quad h = \text{de diameter van } \Omega,$$

$$(2.10.3) \quad \rho = \text{het supremum van de diameters van de ingeschreven bollen in } \Omega.$$

Opmerking 2.10.1

Deze stelling beschrijft in welke mate een benadering met een bepaalde soort elementen (driehoeken, vierhoeken e.d.) met een bepaalde soort benaderingen daarop (bijv. stuksgewijs lineaire of stuksgewijs kwadratische), beter wordt wanneer het gebied in kleinere elementen verdeeld wordt. Bovendien wordt beschreven in welke mate vormveranderingen van de elementen (bijv. vervormingen van de driehoeken) invloed hebben.

Definitie 2.10.1

De verzameling van alle polynomen in de  $\mathbb{R}^n$  van de graad kleiner of gelijk aan  $k$ , wordt aangegeven met  $P_k$ .

We zullen nu, aan de hand van twee lemma's, aangeven hoe de stelling bewezen wordt.

Lemma 2.10.1

Zij  $\Omega$  een begrensde open deelverzameling uit  $\mathbb{R}^n$  met een continue rand. Laat  $p$  gegeven zijn met  $1 \leq p \leq \infty$  en laat  $k \geq 0$  een vast geheel getal zijn. Laat  $f$  een begrensde lineaire functionaal zijn op  $W^{k+1,p}(\Omega)$  zodat

$$(2.10.4) \quad \langle f, u \rangle = 0, \quad \text{voor alle } u \in P_k.$$

Dan bestaat er een constante  $C = C(n, k, p, \Omega)$  zodanig dat

$$(2.10.5) \quad |\langle f, u \rangle| \leq C \|f\|_{W^{k+1, p}} |u|_{k+1, p}, \quad \text{voor alle } u \in W^{k+1, p}(\Omega)$$

### Bewijs

Volgens de definitie van de norm van een operator is  $\|f\|_{W^{k+1, p} \rightarrow \mathbb{R}}$  gedefinieerd door

$$(2.10.6) \quad \|f\|_{k+1, p}^* = \|f\|_{W^{k+1, p} \rightarrow \mathbb{R}} = \sup_{v \neq 0, v \in W^{k+1, p}(\Omega)} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_{k+1, p}}.$$

Op de equivalentieclassen  $[u]$  uit de quotientruimte  $W^{k+1, p}(\Omega)/P_k$  wordt een norm gedefinieerd door

$$(2.10.7) \quad \|[u]\|_{W^{k+1, p}(\Omega)/P_k} = \inf_{v \in P_k} \|u+v\|_{k+1, p}.$$

NEČAS [1967, p.112, Stelling 7.2] bewijst dat de seminorm  $|\cdot|_{k+1, p}$  in  $W^{k+1, p}(\Omega)$  een norm is op de bovengenoemde quotientruimte en dat deze equivalent is met (2.10.7).

Voor iedere  $f$  die aan (2.10.4) voldoet geldt nu dat  $\langle f, u \rangle = \langle f, u+v \rangle$  voor alle  $u \in W^{k+1, p}(\Omega)$  en alle  $v \in P_k$ ,

zodat

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_{k+1, p}^* \inf_{v \in P_k} \|u-v\|_{k+1, p} \leq C \|f\|_{k+1, p}^* |u|_{k+1, p}.$$

Voordat we laten zien hoe het bewijs verloopt moeten we het begrip *equivalent gebied* invoeren.

### Definitie 2.10.2

Laten  $\Omega$  en  $\hat{\Omega}$  begrensde open deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$  zijn. We zeggen dat  $\Omega$  en  $\hat{\Omega}$  equivalent zijn d.e.s.d. als er een affiene bijectie  $x = B\hat{x} + b$  bestaat die  $\Omega$  in  $\hat{\Omega}$  overvoert.

Wanneer  $\Omega$  en  $\hat{\Omega}$  twee equivalente gebieden zijn, kunnen we aan iedere functie  $u$  op  $\Omega$  een functie  $\hat{u}$  op  $\hat{\Omega}$  toevoegen door

$$(2.10.11) \quad \hat{u}(\hat{x}) = u(B\hat{x} + b) = u(x), \quad \text{voor alle } x \in \Omega.$$

De affiene afbeelding induceert zo een isomorfisme tussen  $W^{m,p}(\Omega)$  en  $W^{m,p}(\hat{\Omega})$  voor alle  $m$  en  $p$ .

Op dezelfde wijze kunnen we nu aan elke  $\Pi: W^{k+1,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\Omega)$  een  $\hat{\Pi}: W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \rightarrow W^{m,p}(\hat{\Omega})$  toevoegen door

$$(2.10.12) \quad \hat{\Pi}\hat{u} = \hat{\Pi}u \quad \text{voor alle } u \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Het is eenvoudig in te zien dat  $P_k$  invariant is voor  $\Pi$  d.e.s.d. als  $P_k$  invariant is voor  $\hat{\Pi}$ .

Zijn  $h$ ,  $\rho$ ,  $\hat{h}$  en  $\hat{\rho}$  gedefinieerd door (2.10.2) en (2.10.3) voor  $\Omega$  respectievelijk  $\hat{\Omega}$ , dan kan men bewijzen (CIARLET & RAVIART [1972])

$$(2.10.13) \quad \|B\| \leq \frac{h}{\rho} \quad \text{en} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}}$$

en dat, voor  $h$  klein genoeg,

$$(2.10.14) \quad 1 \leq \frac{\hat{\rho}}{h} \leq \frac{1}{\|B\|} \leq \|B^{-1}\|.$$

#### Lemma 2.10.2

Zij  $\Omega$  een begrensde open deelverzameling uit  $\mathbb{R}^n$  met een continue rand. Laat  $p$  gegeven zijn met  $1 \leq p \leq \infty$ , laat  $k \geq 0$  een vast geheel getal zijn en laat  $m$  een geheel getal zijn,  $0 \leq m \leq k+1$ . Zij  $\Pi$  een lineaire afbeelding

$$(2.10.15) \quad \Pi: W^{k+1,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\Omega),$$

zodat

$$(2.10.16) \quad \Pi u = u \quad , \quad \text{voor alle } u \in P_k.$$

Dan geldt voor alle  $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$

$$(2.10.17) \quad \|u - \Pi u\|_{m,p} \leq C \|I - \Pi\|_{W^{k+1,p} \rightarrow W^{m,p}} |u|_{k+1,p} \quad ,$$

waarin  $C$  dezelfde constante is als in lemma 2.10.1.

Bewijs

Zij  $g$  een gegeven begrensde lineaire functionaal op  $W^{m,p}(\Omega)$ . Voor de begrensde lineaire functionaal op  $W^{k+1,p}(\Omega)$  gedefinieerd door

$$\langle f, u \rangle = \langle g, u - \Pi u \rangle$$

geldt  $\langle f, u \rangle = 0$  voor alle  $u \in P_k$ . Bovendien

$$\|f\|_{k+1,p}^* \leq \|I - \Pi\|_{W^{k+1,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\Omega)} \|g\|_{m,p}^*$$

en

$$\|u - \Pi u\|_{m,p} = \sup_g \frac{|\langle g, u - \Pi u \rangle|}{\|g\|_{m,p}^*}.$$

Aangezien  $|\langle g, u - \Pi u \rangle| = |\langle f, u \rangle| < C \|f\|_{k+1,p}^* |u|_{k+1,p}$  volgt het lemma nu direkt.

Na enig rekenwerk blijkt nu

$$(2.10.18) \quad |\hat{u}|_{\ell,p} \leq \|B\|^\ell |\det(B)|^{-1/p} |u|_{\ell,p}$$

en analoog

$$(2.10.19) \quad |u|_{\ell,p} \leq \|B^{-1}\|^\ell |\det(B)|^{1/p} |\hat{u}|_{\ell,p}.$$

Hieruit volgt

$$(2.10.20) \quad \|u\|_{m,p}^p \leq |\det(B)| \|B^{-1}\|^{mp} \|\hat{u}\|_{mp}^p.$$

Als  $h$  aan (2.10.14) voldoet dan volgt uit lemma 2, door gebruik te maken van (2.10.20) en (2.10.19) en door de schattingen (2.10.13) te substitueren, dat

$$\begin{aligned} \|u - \Pi u\|_{m,p} &\leq |\det(B)|^{1/p} \|B^{-1}\|^m \|\hat{u} - \hat{\Pi} \hat{u}\|_{m,p} \leq \\ &\leq C(u, k, p, \hat{\Omega}) \frac{\hat{h}^m}{\hat{\rho}^{k+1}} \|I - \hat{\Pi}\|_{W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \rightarrow W^{im,p}(\hat{\Omega})} * \\ &\quad * |u|_{k+1,p} \frac{\hat{h}^{k+1}}{\hat{\rho}^m}. \end{aligned}$$

Nu is  $C(u, k, p, \hat{\Omega}) \hat{h}^m \hat{\rho}^{-k-1} \|I - \hat{\Pi}\|$  een konstante die uitsluitend afhangt van het type element ( $\hat{\Omega}$ ) en van de gebruikte benadering op dat element ( $\hat{\Pi}$ ). Samenvattend kunnen we zeggen dat voor een vast type interpolatie (vaste  $u, \hat{\Omega}, \Pi$ ) geldt

$$\|u - \Pi u\|_{m,p} \leq K(k,p) |u|_{k+1,p} \frac{h^{k+1}}{\rho^m}.$$

Hiermee is stelling 2.10.1 bewezen.  $\square$

Gevolg vgl. STRANG [1972] theorem 1.

Zij  $\Omega$  een begrensde open deelverzameling uit  $\mathbb{R}^n$ , zij  $u \in C^{k+1}(\Omega)$  dan geldt, wanneer  $\Pi$  alle polynomen uit  $P_k$  invariant laat voor alle  $m$ ,  $0 \leq m \leq k+1$ , dat

$$(2.10.18) \quad \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\ell|=m}} \|D^\ell u(x) - D^\ell \Pi u(x)\| \leq K(h) \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\ell|=k+1}} \|D^\ell u(x)\| \frac{h^{k+1}}{\rho^m}.$$

#### Voorbeeld 2.10.1

Een voorbeeld van een afbeelding  $\Pi$  wordt gegeven door iedere Lagrange of Hermite interpolatie formule op een element  $\hat{\Omega}$ . De steunpunten van deze interpolatie formules worden door de affiene afbeelding op overeenkomstige punten van de equivalente elementen  $\Omega$  afgebeeld.

#### LITERATUUR

- BRAMBLE, J.H. & S.R. HILBERT, *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with applications to Fourier transforms and spline interpolations*, SIAM Journal of Analysis 7, p.113-124 (1970).
- BRAMBLE, J.H. & A.H. SCHATZ, *Rayleigh-Ritz-Galerkin methods for Dirichlet's problem using subspaces without boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math. 23, p.653-675 (1970).
- BRAMBLE, J.H. & A.H. SCHATZ, *On the numerical solution of elliptic boundary value problems by least square approximations of the data*, Uit: B. HUBBARD, editor, *Numerical Solution of Partial Differential Equations* (SYNSPADE), Academic Press, New York, 1971.



- CÉA, J., *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*, Ann. Just. Fourier 14, p.345-444 (1964).
- CIARLET, P.G. & P.A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to the finite element method*, Arch. Rat. Mech. Anal. 46, p.177-199 (1972).
- FORSYTH, G. & W. WASOW, *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1960.
- FRIEDMANN, A., *Partial Differential Equations*, Rinehart, Holt and Winston, New York, 1969.
- LIONS, J.L. & E. MAGÈNES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- MIKHLIN, S.G., *The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional*, Holden-Day, San Francisco, 1965.
- MIKHLIN, S.G., *The numerical Performance of Variational Methods*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.
- NEČAS, J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia, Praag, 1967.
- STRANG, G. & G. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- STUMMEL, F., *Rand und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1969.
- YOSIDA, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1965.
- TEMAM, R., *Numerical Analysis*, Reidel, Dordrecht, 1973.