Hoofdstuk 3

Lineaire analyse

Voor dit hoofdstuk is gebruik gemaakt van het collegediktaat 1967 van prof. C.G. Lekkerkerker voor een college aan de Universiteit van Amsterdam. In het diktaat wordt voor literatuur verwezen naar [4, 7, 11]

3.1 Metrische ruimten

Definitie 3.1.1 (metrische ruimte). Een *metrische ruimte* is een verzameling R, tezamen met een reële functie $\rho: \ R \times R \to \mathbb{R}$, zodanig dat:

(i) $\rho(x,y) \geq 0$ voor alle $x, y \in R$,
(ii) $\rho(x,y) = 0$ dan en alleen dan als $x = y$,
(iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ voor alle $x, y \in R$ (*symmetrie*),
(iv) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ voor alle $x, y, z \in R$ (*driehoeksongelijkheid*).

De elementen $x, y, z, \ldots \in R$ heten ook *punten*. Bij gegeven x en y heet $\rho(x,y)$ de *afstand* van x en y. De functie ρ heet een *metriek*.

Uit (iv) volgt $\rho(x,y) \geq \rho(x,z) - \rho(y,z)$. Verwisseling van x en y geeft $\rho(y,x) \geq \rho(y,z) - \rho(x,z)$. Vanwege de symmetrie hebben we dan

$$|\rho(y,z) - \rho(x,z)| \leq \rho(x,y) \, .$$

Voorbeeld 3.1.2. De k-dimensionale *Euclidische ruimte* $\mathbb{R}^k$, met $k \in \mathbb{N}$, waarin de afstand tussen twee punten $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ en $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ gegeven wordt door

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_k - y_k)^2} \, .$$

Voorbeeld 3.1.3. De verzameling R der reële functies $x = x(t)$, gedefinieerd en continu op een gegeven segment $[a,b]$, met

$$\rho(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \, .$$

Voorbeeld 3.1.4. Dezelfde verzameling R, maar nu met de metriek

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt \, .$$

Voorbeeld 3.1.5. Een deelverzameling van een metrische ruimte R, met metriek ρ, is in diezelfde metriek weer een metrische ruimte. We spreken dan van *deelruimte* van R.

Definitie 3.1.6 (**ε-omgeving**)**.** Zij R een metrische ruimte met metriek ρ. Voor $a \in R$ en $\varepsilon > 0$ heet

$$U_\varepsilon(a) = \{\ x \mid x \in R \text{ en } \rho(a, x) < \varepsilon\ \}$$

de *ε-omgeving* van a in R.

Met behulp van dit begrip definieert men op de gebruikelijke wijze[1]

(i) een *inwendig punt* van een verzameling $A \subset R$,
(ii) een *verdichtingspunt* van een verzameling $A \subset R$,
(iii) een *open verzameling*,
(iv) een *gesloten verzameling*.

Definitie 3.1.7 (compacte verzameling in een metrische ruimte). Een metrische ruimte R met metriek ρ heet *compact* als elke oneindige deelverzameling van R een verdichtingspunt in R heeft. Een verzameling A in R heet compact als A, opgevat als metrische ruimte in de metriek ρ, compact is.

Een equivalente definitie is: R is compact als elke open overdekking een eindige deeloverdekking bevat. We gaan hier niet op in. (Zie bijvoorbeeld [13].)

Eigenschappen van een compacte verzameling zijn:

(i) Een compacte verzameling in R is gesloten.
(ii) Een reële continue functie op een compacte verzameling A in R neemt op A een maximum en een minimum aan.

Bijv. de functie $\rho(a, x)$, met $a \in R$ vast. Deze functie is continu[2] omdat

$$|\rho(a, x) - \rho(a, x_0))| \le \rho(x, x_0) < \varepsilon \text{ voor } x \in U_\varepsilon(x_0)\,.$$

Opmerking 3.1.8. De functie $\rho(a, x)$, met $a \in R$ vast, is begrensd op elke compacte verzameling in R. In deze zin is dus een compacte verzameling begrensd.
Het is niet waar dat elke gesloten begrensde verzameling in R altijd compact is: beschouw een metrische ruimte R met oneindig veel punten en met $\rho(x, y) = 1$ als $x \neq y$.

Definitie 3.1.9 (een convergente rij in een metrische ruimte). Een rij (a_n) in een metrische ruimte R met metriek ρ, heet *convergent* naar $a \in R$, als[3] bij elke $\varepsilon > 0$ een index $n_0 = n_0(\varepsilon)$ bestaat, zodat $n > n_0 \;\Rightarrow\; \rho(a_n, a) < \varepsilon$. We schrijven dan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

De limiet van een convergente rij is eenduidig bepaald. (ga eenvoudig na!)

[1] Deze definities zie je in veel gebieden van de wiskunde terug:
(i) Een punt $p \in R$ is een *verdichtingspunt* van $A \subset R \;\Leftrightarrow\; \forall_{\varepsilon>0}\exists_{z\in A}\ 0 < \rho(p, z) < \varepsilon$.
(ii) Een punt $p \in R$ is een *inwendig punt* van $A \subset R \;\Leftrightarrow\; \exists_{\varepsilon_0>0}\forall_{\varepsilon<\varepsilon_0}\ U_\varepsilon(p) \subset A$.
(iii) $A \subset R$ is een *open verzameling* $\Leftrightarrow$ Alle punten $a \in A$ zijn inwendig punt.
(iv) $A \subset R$ is een *gesloten verzameling* $\Leftrightarrow$ $R \setminus A$ is een open verzameling.

[2] Een afbeelding $f : R \to \mathbb{R}$ heet *continu* $\Leftrightarrow\; \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in R}\ \rho(x, y) < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

[3] In formule-vorm: $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>n_0}\ \ \rho(a_n, a) < \varepsilon$.

Definitie 3.1.10 (limietpunt). Een punt $a \in R$ heet *limietpunt* van een rij $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ in R als bij elke $\varepsilon > 0$ oneindig veel indices $n_1, n_2, \dots$, bestaan zodat $\rho(a_{n_k}, a) < \varepsilon$ voor $k = 1, 2, \dots$.

In een compacte metrische ruimte heeft elke rij tenminste één limietput en heeft ook elke rij een convergente deelrij.

Definitie 3.1.11 (fundamentaalrij). Een rij $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ in R heet een *fundamentaalrij*, of ook wel *Cauchy-rij*, als geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\in\mathbb{N}} \quad n, m > n_0 \;\Rightarrow\; \rho(a_n, a_m) < \varepsilon\,.$$

Definitie 3.1.12 (volledige metrische ruimte). Als iedere fundamentaalrij in R convergent is in R, dan heet R *volledig.*

Stelling 3.1.13. Een compacte metrische ruimte is volledig.
Bewijs: Zij R en compacte metrische ruimte met metriek ρ, en zij (a_n) een fundamentaalrij in R. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat (a_n) een fundamentaalrij is, bestaat er een index n_0 zodat $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ voor $n, m > n_0$. Omdat R compact is, heeft verder (a_n) een limietpunt $a \in R$. Dan bestaat een index $n > n_0$ met $\rho(a_m, a) < \varepsilon/2$. Dan is $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ voor $n > n_0$. Dus de rij (a_n) convergeert naar a. □

We onderzoeken de eerder gegeven voorbeelden op volledigheid.

Voorbeeld 3.1.14. (Zie voorbeeld 3.1.2.) De ruimte $\mathbb{R}^k$ met de gewone metriek, is volledig. Dit volgt uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ en de eindigheid van k.

Voorbeeld 3.1.15. (Zie voorbeeld 3.1.3.) Zij (x_n) een fundamentaalrij, in de gegeven metriek. Dan is voor een willekeurig gekozen $\varepsilon > 0$ er een bijpassende index n_0 te vinden zodat

$$\max_{a\le t\le b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \text{ voor alle } n, m > n_0\,,$$

ofwel

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{t\in[a,b]} \quad n, m > n_0 \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

D.w.z. de rij (x_n) voldoet op $[a, b]$ aan de uniforme Cauchy-voorwaarde[4]. Uit bekende stellingen over rijen van functies volgt nu (zie bijvoorbeeld [9].) :
(1.) de rij functies $x_n = x_n(t)$ convergeert uniform op $[a, b]$ naar een functie $x = x(t)$ op $[a, b]$.
(2.) mèt de functies x_n is ook de functie x continu op $[a, b]$.
Het resultaat (1.) zegt dat, voor willekeurige $\varepsilon > 0$ en bijpassende index n_ε

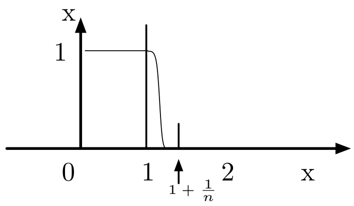
$$\max_{a\le t\le b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ voor alle } n > n_\varepsilon\,,$$

Het resultaat (2.) zegt dat x tot de beschouwde metrische ruimte behoort. Hiermee is bewezen dat R volledig is.

Voorbeeld 3.1.16. (Zie voorbeeld 3.1.4.) In dit geval is R niet volledig. Men neme $a = 0$ en $b = 2$ en beschouwe de rij functies x_n waarvan de grafiek er als volgt uitziet:

[4]Merk op dat deze uniforme convergentie (3.1) verschilt van (een sterkere eis is dan) puntsgewijze convergentie:

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{t\in[a,b]}\exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad n, m > n_0 \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon\,. \tag{3.2}$$



Er is geen continue limietfunctie x, in de beschouwde metriek. Voor x zou namelijk moeten gelden

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor} \quad t < 1, \\ 0 & \text{voor} \quad t > 1. \end{cases}$$

We laten nu zien dat elke metrische ruimte ingebed kan worden in een metrische ruimte die volledig is. En wel bewijzen we

Stelling 3.1.17 (completering van een metrische ruimte). Bij een metrische ruimte R met metriek ρ, bestaat steeds een metrische ruimte S met de volgende eigenschappen:
(1.) S is volledig,
(2.) R is een deelruimte van S met zezelfde metriek (dwz de metriek van R is de restrictie tot R van de metriek op S),
(3.) R ligt dicht in S.

Opmerking 3.1.18. Een dergelijke constructie zijn komen we ook tegen bij de invoering van de reëele getallen. In het bijzonder zal de constructie van S analoog zijn aan de invoering van de reëele getallen d.m.v. fundamentaalrijen van rationale getallen.

Bewijs: In het volgende geven we fundamentaalrijen $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{b_n\}$, ... in R kort aan met α, α', β, ... We noemen twee fundamentaalrijen α en α' *equivalent* en schrijven $\alpha \sim \alpha'$, als geldt:

$$\rho(a_n, a'_n) \to 0 \text{ voor } n \to \infty\,.$$

Deze relatie is een *equivalentierelatie*:
1: $\alpha \sim \alpha'$ (triviaal),
2: als $\alpha \sim \beta$ dan $\beta \sim \alpha$ (triviaal),
3: als $\alpha \sim \beta$ en $\beta \sim \gamma$ dan $\alpha \sim \gamma$, omdat

$$\rho(a_n, c_n) \leq \rho(a_n, b_n) + \rho(b_n, c_n)$$

en dus

$$\rho(a_n, c_n) \to 0 \text{ als } \rho(a_n, b_n) \to 0 \text{ en } \rho(b_n, c_n) \to 0 \text{ voor } n \to \infty\,.$$

Dientengevolge valt de verzameling der fundamentaalrijen in R uiteen in twee aan twee disjuncte klassen van equivalente fundamentaalrijen. We geven deze klassen aan met $A, B, \ldots$.
Zij nu S de collectie der klassen $A, B, \ldots$. Stel

$$\rho(A, B) = \lim_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n)\,, \tag{3.3}$$

waarbij (a_n) een fundamentaalrij uit klasse A en (b_n) een fundamentaalrij uit klasse B is.
We tonen aan:
(1.) de limiet in (3.3) bestaat en is eindig,

(2.) deze limiet hangt niet af van de keuze van (a_n) en (b_n) in A resp. B,
(3.) ρ is een metriek op S.

(1.) We hebben

$$\rho(a_n, b_n) \leq \rho(a_n, a_m) + \rho(a_m, b_m) + \rho(b_m, b_n)$$

dus

$$\rho(a_n, b_n) - \rho(a_m, b_m) \leq \rho(a_n, a_m) + \rho(b_m, b_n) \, .$$

Met dezelfde formule met n en m verwisseld, vinden we

$$|\rho(a_n, b_n) - \rho(a_m, b_m)| \leq \rho(a_n, a_m) + \rho(b_m, b_n) \, .$$

Omdat het rechterlid tot 0 nadert voor $n, m \to \infty$, volgt dat de rij der getallen $(\rho(a_n, b_n))$ een fundamentaalrij is en dus convergeert.

(2.) Zij $(a_n) \sim (a'_n)$. Dan is

$$|\rho(a_n, b_n) - \rho(a'_n, b_n)| \leq \rho(a_n, a'_n) \to 0 \quad (n \to \infty) \, .$$

Dus $\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(a'_n, b_n)$. Evenzo bij vervanging van (b_n) door een equivalente rij.

(3.) Het is triviaal dat steeds $\rho(A, B) \geq 0$ en dat $\rho(A, A) = 0$. Is $\rho(A, B) = 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n) = 0$ en dus $(a_n) \sim (b_n)$, dus $A = B$.

Vervolgens is $\rho(A, B) = \rho(B, A)$. Zijn A, B, C drie equivalentieklassen en (a_n), (b_n) en (c_n) rijen daaruit, dan hebben we

$$\rho(a_n, c_n) \leq \rho(a_n, b_n) + \rho(b_n, c_n)$$

en dus (limietovergang)

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C) \, .$$

Hiermee zijn (1.), (2.) en (3.) bewezen.

Een constante rij $(a, a, a, \ldots)$, $a \in R$ is zeker een fundamentaalrij. Laten we equivalentieklasse die de rij bevat aangeven met $\tilde{a}$ en de collectie der klassen $\tilde{a}$ met S_0. uit onze definities volgt dat

$$\rho(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq \rho(a, b) \, . \tag{3.4}$$

De afbeelding $a \to \tilde{a}$ is dus een isometrie[5], en wel van R op $S_o \subset S$. I.h.b. is deze afbeelding eenduidig. Krachtens (3.4) is het niet bezwaarlijk de op S ingevoerde metriek óók met ρ aan te geven.)

We bewijzen tenslotte dat S_0 dicht light in S en dat S volledig is. Zij allereerst A een willekeurige klasse in S en zij $(\tilde{a}_n)$ een fundamentaalrij uit deze klasse. Bij vaste n is $\tilde{a}_n$ een klasse in S_0 en er geldt

$$\rho(A, \tilde{a}_n) = \lim_{k\to\infty} \rho(a_k, \tilde{a}_n) \, .$$

Dus

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \quad n > n_\varepsilon \Rightarrow \rho(A, \tilde{a}_n) \leq \varepsilon \, .$$

Dus A wordt willekeurig dicht benaderd door elementen in S_0.
Tevens is A limiet van de rij $(\tilde{a}_n)$.

Zij vervolgens (A_n) een fundamentaalrij in S. Voor elke n is er wegens het vorige een element $b_n \in R$ met

$$\rho(A_n, \tilde{b}_n) < \frac{1}{n} \, .$$

[5]Een isometrie is een afbeelding tussen twee metrische ruimten die de afstanden bewaart. Dwz $f : R_1 \to R_2$ is een isometrie als $\forall_{x,y\in R_1} \; \rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y))$, waarin ρ_1 en ρ_2 de metrieken in R_1 resp. R_2 aangeven.

Mèt (A_n) is ook $(\tilde{b}_n)$ een fundamentaalrij in S. Dan is (b_n) een fundamentaalrij in R. De equivalentieklasse die deze rij bevat is limiet van de rij $(\widetilde{b}_n)$, en dus van de rij (A_n). Daarmee is bewezen dat S volledig is.

Vervangen we nog S_0 door R, dan gelden voor S de beweringen van de stelling $\square$

Opmerking 3.1.19. Zij eens S_1 een tweede metrische ruimte die aan de eisen van de stelling voldoet en zij α een willekeurig element van S_1. Dan is α te krijgen als de limiet van een rij punten $a_n \in R$. Dat is een fundamentaalrij in R en bepaalt dus een element $A \in S$. Men gaat gemakkelijk na dat de toevoeging $\alpha \to A$ een isometrie van S_1 op S is. Hiermee is gevonden: de ruimte S uit Stelling 3.1.17 is op isometrie na eenduidig bepaald. We noemen deze ruimte het *volledig omhulsel* van R en geven hem aan met $\widetilde{R}$.

Opmerking 3.1.20. Een gesloten deelruimte R_1 van een volledige metrische ruimte R is weer volledig. Immers een fundamentaalrij in R_1 is ook een fundamentaalrij in R en dus convergent in R, en de limiet behoort tot R_1.

3.2 Lineaire ruimten

Definitie 3.2.1 (lineaire ruimte). Een *lineaire ruimte* is een verzameling R met elementen $x, y, z, \ldots$, waarin een optelling en een vermenigvuldiging met complexe getallen $\alpha, \beta, , \ldots$ gedefinieerd is, zodanig dat geldt:

(i) R is een commutatieve groep t.a.v. de optelling,

$\forall_{x,y,z} \in R$	$(x+y)+z$	$= x+(y+z)$	associativiteit
$\exists_{\,0\in R}\ \forall_{x\in R}$	$0+x$	$= x$	er bestaat een nulelement
$\forall_{x\in R}\ \exists_{(-x)\in R}$	$x+(-x)$	$= 0$	oplosbaarheid $x+w=y$
$\forall_{x,y\in R}$	$x+y$	$= y+x$	commutativiteit

(ii) R kent een scalaire vermenigvuldiging

$\forall_{x,y\in R,\,\alpha\in\mathbb{C}}$	$\alpha(x+y)$	$= \alpha x+\alpha y,$	distributiviteit
$\forall_{x\in R,\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}}$	$(\alpha+\beta)x$	$= \alpha x+\beta x,$	distributiviteit
$\forall_{x\in R,\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}}$	$\alpha(\beta x)$	$= (\alpha\beta)x,$	associativiteit
$\forall_{x\in R}$	$1\ \ x$	$= x,$	$1\in\mathbb{C}$

De elementen uit R heten ook *punten* of *vectoren*.

Opmerking 3.2.2. Enkele directe consequenties van de definitie zijn:
i) We kunnen vectoren aftrekken:

$$\alpha x - \beta x = (\alpha - \beta)x\,.$$

ii) Er bestaat een nul-vector $\mathbf{0}$: (let op: $0 \in \mathbb{C}$!)

$$0.x = (1-1).x = 1.x - 1.x = \mathbf{0}\,.$$

Wanneer geen verwarring mogelijk is noteren we $\mathbf{0} \in R$ ook wel als $0 \in R$.

Opmerking 3.2.3. We kunnen de lineaire ruime ook definiëren voor de reële getallen ipv voor de complexe getallen: we vervangen eenvoudig $\mathbb{C}$ door $\mathbb{R}$. We spreken dan van een *reële lineaire ruimte.*

Definitie 3.2.4 (lineair onafhankelijke vectoren). Een aantal elementen $x_1, x_2, ..., x_k$ heet *lineair onafhankelijk* wanneer

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0\,.$$

Opmerking 3.2.5. Een stelsel lineair onafhankelijke vectoren $x_1, x_2, ..., x_k \in R$ heet *maximaal* als het niet uit te breiden is met een element $x_{k+1} \in R$ zodat $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ ook een lineair onafhankelijk stelsel is.

Is een stelsel $x_1, x_2, ..., x_k$ maximaal, dan geldt:
(i) elk element $y \in R$ is te schrijven als

$$y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$$

We zeggen dat het stelsel $x_1, x_2, ..., x_k$ de ruimte R *opspant*.
(ii) elk stelsel van k onafhankelijke elementen $y_1, y_2, ..., y_k \in R$ is maximaal. We noemen k de *dimensie* van R en zo'n stelsel $y_1, y_2, ..., y_k$ een *basis* van R.

Opmerking 3.2.6. Is R een (complexe) lineaire ruimte van dimensie k, dan kan ze ook opgevat worden als een reële lineaire ruimte van dimensie $2k$.

Opmerking 3.2.7. Is geen enkel eindig stelsel $x_1, x_2, ..., x_k \in R$ maximaal, dan wordt de ruimte dus niet opgespannen door eindig veel vectoren. Dan heet R van *oneindige dimensie.*

3.3 Genormeerde lineaire ruimten

Definitie 3.3.1 (genormeerde lineaire ruimte)**.** Een lineaire ruimte R heet *genormeerd* als op R een reële functie $\|\cdot\|$ gedefinieerd is, zodanig dat geldt:

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & \|x\| \geq 0 & \forall_{x \in R} \\
\text{(ii)} & \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 & \forall_{x \in R} \\
\text{(iii)} & \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| & \forall_{x \in R, \alpha \in \mathbb{C}} \\
\text{(iv)} & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| & \forall_{x, y \in R}
\end{array}$$

De functie $\|\cdot\| : R \to \mathbb{R}$ heet de *norm* van R.

Opmerking 3.3.2. Als we stellen

$$\rho(x, y) := \|x - y\| \quad \forall_{x, y \in R} ,$$

dan is ρ een metriek op R, zoals we eenvoudig kunnen nagaan[6]. De genormeerde lineaire ruimte is dus tevens een metrieke ruimte.

We merken op dat er ook metrieken mogelijk zijn die geen norm zijn, zoals bijvoorbeeld $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ op de reële lineaire ruimte $\mathbb{R}$.

Opmerking 3.3.3. Omdat

$$\Big| \|x\| - \|x_0\| \Big| \leq \|x - x_0\| ,$$

is $\|x\|$ een continue functie van x.

Stelling 3.3.4. In een eindig-dimensionale genormeerde lineaire ruimte met een basis $\{x_1, \ldots, x_k\}$ bestaan er constanten C_1 en C_2 zodat voor een willekeurige

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$$

[6] Want de eigenschappen (i), (ii) en (iii) van de metriek volgen direkt, en (iv) volgt uit $\rho(x, z)^2 = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \leq \|x - y\| + 2\sqrt{\|x - y\|}\sqrt{\|y - z\|} + \|y - z\| = \left(\sqrt{\|x - y\|} + \sqrt{\|y - z\|}\right)^2 = (\rho(x, y) + \rho(y, z))^2$.

geldt

$$C_1 \min_{i=1,\dots,k} |\alpha_i| \leq \|x\| \leq C_2 \max_{i=1,\dots,k} |\alpha_i| \,. \tag{3.5}$$

We zeggen ook wel dat de norm, op een constante na, kan worden afgeschat door de minimale en maximale coefficient.

BEWIJS: De vorm $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\|$ is een continue functie van de coefficienten $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in \mathbb{C}^k$. Immers

$$\begin{aligned}
& \left| \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\| - \|\bar{\alpha}_1 x_1 + \cdots + \bar{\alpha}_k x_k\| \right| \\
\leq\ & \|(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1) x_1 + \cdots + (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) x_k\| \\
\leq\ & \|(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1) x_1\| + \cdots + \|(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) x_k\| \\
\leq\ & \Big(\|x_1\| + \cdots + \|x_k\| \Big) \max_{i=1,\dots,k} (\alpha_i - \bar{\alpha}_i)
\end{aligned}$$

Als $x \neq 0$ dan $\min_{i=1,\dots,k} |\alpha_i| = m(x) > 0$ en $\max_{i=1,\dots,k} |\alpha_i| = M(x) > 0$. Op de compacte verzameling (kubusrand) $\max_{i=1,\dots,k} |\alpha_i| = 1$ neemt de continue functie $\|x(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|$ dus een positief maximum (C_2) en minimum (C_1) aan. Wegens homogeniteisoverwegingen geldt dus ook (3.5). □

Opmerking 3.3.5. We merken op dat voor R een lineaire ruimte van dimensie k met basis $\{x_1, \dots, x_k\}$ een norm wordt gedefinieerd door

$$\|x\| = \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\| := \max_{i=1,\dots,k} |a_i| \,.$$

Stelling 3.4.3 zegt eigenlijk dat een willekeurige norm met deze norm "equivalent" is in de zin van de volgende definitie.

Definitie 3.3.6. Twee normen $\|\cdot\|$ en $\|\cdot\|'$ op een lineaire ruimte R heten *equivalent* als er twee positieve constanten C_1 en C_2 bestaan zodat

$$C_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq C_2 \|x\| \qquad \forall x \in R \,.$$

Gevolg 3.3.7. Uit Stelling 3.4.3 volgt direct dat elk tweetal normen op een eindig-dimensionale lineaire ruimte equivalent is.

Opmerking 3.3.8. Voor lineaire ruimten met oneindige dimensie kunnen normen wel degelijk niet-equivalent zijn!

Stelling 3.3.9. Zijn $\|\cdot\|$ en $\|\cdot\|'$ twee equivalente normen op een lineaire ruimte R (van eindige of van oneindige dimensie) en is R volledig in de eerste norm, dan is hij dat ook in de tweede.

BEWIJS: Is $(x^{(n)}$ een fundamentaalrij in de eerste norm, dan is hij dat ook in de tweede norm; uit convergentie in de eerste norm volgt dan ook convergentie in de tweede norm. □

3.4 Banachruimten

Definitie 3.4.1 (Banachruimte). Een genormeerde lineaire ruimte heet *Banachruimte* als R volledig is in de metriek $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Dit betekent dus dat voor elke rij (x_n) in R met de eigenschap

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \quad \text{voor } n, m \to \infty$$

er een element $x \in R$ bestaat met de eigenschap dat

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{voor } n \to \infty \,.$$

Opmerking 3.4.2. In een Banachruimte B, met norm $\|\cdot\|$, kunnen we reeksen beschouwen. Onder de *reeks* $\sum a_n$ verstaan we hierbij de rij van partiële sommen $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$. Convergeert de rij $(s_n)_{n=1,2,\ldots}$ naar een element $s \in B$, dan heet de reeks $\sum a_n$ convergent en heet s de *som van de reeks*. Deze som wordt aangegeven met $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ of, als er geen verwarring mogelijk is, met $\sum a_n$.

Een nodig en voldoende voorwaarde voor convergentie van de reeks $\sum a_n$ is de Cauchy-voorwaarde: dat voor willekeurige $\varepsilon > 0$ er een $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

$$n > m > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=m+1}^{k=n} a_k \right\| < \varepsilon \, .$$

Aan deze eis is zeker voldaan als $\sum \|a_n\|$ convergeert, dwz als de reeks *absoluut convergeert.*

Een genormeerde lineaire ruimte kunnen we (net als iedere metrische ruimte) completeren tot een Banachruimte.

Stelling 3.4.3. Zij R een genormeerde lineaire ruimte, met norm $\|\cdot\|$, en zij $\tilde{R}$ het volledig omhulsel van R als metrische ruimte. Stel

$$\begin{aligned} x + y &= \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) \, , \\ \alpha x &= \lim_{n\to\infty} \alpha x_n \, , \\ \|x\| &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \, , \end{aligned}$$

waarin $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in R$ en (x_n) en (y_n) bijbehorende fundamentaalrijen in R. Dan is $\tilde{R}$ een Banachruimte.

Bewijs: De limieten van de rechterleden bestaan omdat $(x_n + y_n)$ en (αx_n) fundamentaalrijen in R zijn en $(\|x_n\|)$ een fundamentaalrij van getallen is, omdat

$$\big| \|x_n\| - \|x_m\| \big| \leq \|x_n - x_m\| \, .$$

De metriek ρ is ook de metriek behorende bij de ingevoerde norm:

$$\rho(x,y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \|x - y\|$$

Het is nu eenvoudig in te zien dat door $\tilde{R}$ aan alle eisen voor een Banachruimte is voldaan. □

Stelling 3.4.4. Een eindig-dimensionale genormeerde lineaire ruimte is altijd volledig en dus een Banachruimte.

Bewijs: De eindig-dimensionale genormeerde lineaire ruimte erft de volledigheids-eigenschap van de scalairen. We zien dit als volgt.

Zij R een genormeerde lineaire ruimte van eindige dimensie k, met een basis $\{x_1, \ldots, x_k\}$. We nemen een willekeurige fundamentaalrij $(x^{(n)})$ in R en schrijven

$$x^{(n)} = \alpha_1^{(n)} x_1 + \cdots + \alpha_k^{(n)} x_k \qquad (n = 1, 2, \ldots) \, .$$

We passen nu Stelling 3.4.3 toe op de elementen

$$x^{(n)} - x^{(m)} = (\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{(m)}) x_1 + \cdots + (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) x_k$$

dan vinden we eerst dat $(\alpha_1^{(n)})$, …, $(\alpha_k^{(n)})$ fundamentaalrijen zijn in $\mathbb{C}$ en dus convergeren, en vervolgens dat de rij $(x^{(n)})$ convergeert. Daarmee is bewezen dat R volledig is. □

Voorbeeld 3.4.5 (de ruimte $\mathbb{C}^k$). De complexe Euclidische ruimte $\mathbb{C}^k$, met $k \in \mathbb{N}$, is een lineaire ruimte. Deze ruimte bestaat uit alle rijtjes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ van k complexe getallen, met de gebruikelijke definitie van complex veelvoud. Mogelijke normen op $\mathbb{C}^k$ zijn

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \,, \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2} \,, \qquad \max_{i=1,\ldots,k} |\alpha_i| \,.$$

In ieder van deze normen is $\mathbb{C}^k$ een Banachruimte.

Voorbeeld 3.4.6 (de ruimte $C([a,b])$). De ruimte van complexwaardige continue functies op een eindig segment $[a,b]$ is een Banachruimte. Deze ruimte wordt aangegeven met $C([a,b])$. Voor de elementen van deze ruimte, de functies $x(t)$, $a \le t \le b$, worden optelling, scalaire vermenigvuldiging en norm gedefinieerd door:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (x+y)(t) & = & x(t) + y(t) & a \le t \le b \,, \\ (\alpha x)(t) & = & \alpha\, x(t) & a \le t \le b \\ \|x\| & = & \max_{a \le t \le b} |x(t)| \,. & \end{array} \right. \tag{3.6}$$

De functies $x + y$ en αx behoren weer tot $C([a,b])$ en het is gemakkelijk na te gaan dat aan de eisen van een lineaire ruimte en van een norm is voldaan. Is $(x^{(n)})$ een fundamentaalrij in $C([a,b])$ dan voldoet de rij functies $(x^{(n)})$ op $[a,b]$ aan de uniforme Cauchyvoorwaarde. Deze rij convergeert dan in de norm van $C([a,b])$ naar een element $x \in C([a,b])$. (Zie voorbeeld 3.1.3). Dus $C([a,b])$ is een Banachruimte.

Voorbeeld 3.4.7 (de ruimte $B(T)$). De ruimte $B(T)$, met T een willekeurige niet-lege verzameling. De elementen van deze ruimte zijn de begrensde complexwaardige functies $x = x(t)$ op T. De som en scalair veelvoud worden gedefinieerd als in (3.6) en de norm van het element is

$$\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)| \,.$$

Aan alle eisen voor een Banachruimte zijn voldaan. I.h.b. wordt de volledigheid als volgt bewezen: Is $(x^{(n)})$ een fundamentaalrij in $B(T)$, dan convergeren de functies uniform op T naar een functie x en is met de functies $x^{(n)}$ ook x begrensd op T, zodat $x^{(n)} \to x \in B(T)$.

Voorbeeld 3.4.8 (de ruimte ℓ^∞). We nemen in het laatste voorbeeld $T = \mathbb{N}$. We krijgen dan de Banachruimte met als elementen alle begrensde rijen complexe getallen $x = (x_1, x_2, \ldots)$, waarbij

$$\left\{ \begin{array}{lll} (x+y)(t) & = (x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) & = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \,, \\ (\alpha x)(t) & = \alpha\, (x_1, x_2, \ldots) & = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots) \\ \|x\| & = \sup_{k=1,2,\ldots} |x_k| \,. & \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Deze ruimte wordt gewoonlijk aangegeven met $\ell^\infty(T)$.

Voorbeeld 3.4.9 (de ruimte ℓ^1). Deze ruimte bestaat uit de rijen complexe getallen $x = (x_1, x_2, \ldots)$, waarvoor $\sum |x_n| < \infty$. De som en het scalaire veelvoud worden weer gedefinieerd als in (3.7). Daarmee krijgen we een lineaire ruimte. De norm is nu

$$\|x\| = \sum_{n=1,2,\ldots} |x_n| \,.$$

Men gaat hiervoor ook gemakkelijk na dat dit een norm is. We bewijzen de volledigheid.
BEWIJS: Voor een willekeurige rij $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^1$ schrijven we

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} |x_i| \qquad \text{voor} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Er geldt dan $S_k(x) \leq \|x\|$ voor $k = 1, 2, \ldots$, en $\lim_{k\to\infty} S_k(x) = \|x\|$.
Zij nu $(x^n)_{n=1,2,\ldots}$ een fundamentaalrij in ℓ^1. We tonen achtereenvolgens aan[7]

1.) De rij der normen $||x^n\|$ is begrensd.
Want (x^n) een fundamentaalrij in $\ell^1 \Rightarrow \Big|\|x^n\| - \|x^m\|\Big| \leq \|x^n - x^m\| \to 0$ voor $n, m \to \infty$.
Dus $(\|x^n\|)$ is een fundamentaalrij in $\mathbb{R} \Rightarrow (\|x^n\|)$ convergeert $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x^n\| = C \in \mathbb{R}$.
2.) De rij van getallenrijen x^i, $i = 1, 2, \ldots$, convergeert componentsgewijs naar een rij

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)\,,$$

Want $|x_k^n - x_k^m| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m| = \|x^n - x^m\| \to 0$ voor $n, m \to \infty$, zodat $\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \in \mathbb{C}$. D.w.z. voor elke k convergeert de $(x_k^n)_{n=1}^{\infty}$ naar een getal $x_k \in \mathbb{C}$.
3.) De rij $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ behoort tot ℓ^1, dwz $\sum |x_k|$ convergeert.
Want $S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} |x_i| = \sum_{i=1}^{k} \lim_{m\to\infty} |x_i^m| = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |x_i^m| = \lim_{m\to\infty} S_k(x^m)$.
Nu $\forall_{m,k} S_k(x^m) \leq \|x^m\| \leq C$ zodat $\forall_k S_k(x) \leq C$ en $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \lim_{k\to\infty} S_k(x) \leq C$.
4.) De rij (x^n) convergeert naar x in de norm van ℓ^1.
Want bekijken we $\|x^n - x\|$, dan zien we $S_k(x^n - x) = \sum_{i=1}^{k} |x_i^n - x_i| = = \sum_{i=1}^{k} \lim_{m\to\infty} |x_i^n - x_i^m| = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |x_i^n - x_i^m| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m| = = \lim_{m\to\infty} \|x^n - x^m\| < \varepsilon$ voor $n > n_\varepsilon$. Ofwel $\forall_{\varepsilon,k} \exists_{n_\varepsilon} n > n_\varepsilon \Rightarrow S_k(x^n - x) < \varepsilon$.
Zodat $\forall_\varepsilon \exists_{n_\varepsilon} n > n_\varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_k(x^n - x) \leq \varepsilon$. ofwel $\forall_\varepsilon \exists_{n_\varepsilon} n > n_\varepsilon \Rightarrow \|x^n - x\| \leq \varepsilon$.

□

Voorbeeld 3.4.10 (de ruimten ℓ^p). De voorbeelden 3.4.8 en 3.4.9 kunnen we zien als speciale gevallen van de norm

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1,2,\ldots} |x_n|^p \right)^{1/p} \qquad \text{met} \quad p \geq 1\,.$$

Voor ieder $p \geq 1$ worden rijen van complexe (of reële) getallen een Banachruimte.

Voorbeeld 3.4.11. Net als voorbeeldn 3.1.2, zijn de voorbeelden 3.1.3 en 3.1.4, met een passende definitie van de som, scalair veelvoud en norm, voorbeelden van reële Banachruimten.

Voorbeeld 3.4.12 (de ruimten $L^p(\Omega)$). Net als de normen voor de rijtjes getallen, hierboven, kunnen ook normen voor de functies (de voorbeelden 3.1.3 en 3.1.4) gegeneraliseerd worden, Op de verzameling R der complexe (of reële) functies $x = x(t)$, gedefinieerd en continu op een gegeven segment $\Omega = [a, b]$, kunnen we normen definiëren voor voor $p \geq 1$ door

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \; dt \right)^{1/p} \qquad \text{met} \quad p \geq 1 \tag{3.8}$$

Voor ieder $p \geq 1$ wordt de verzameling van complexe (of reële) functies met eindige norm (3.8) een Banachruimte[17]. We moeten daarvoor echter wel de juiste definitie van het begrip "functie"

[7] Merk op dat hier in x^n het getal n niet een macht van x aangeeft, maar een boven-index n is, en dat x^n een rij is met elementen $x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, \cdots, x_k^n, \cdots$.

kiezen, want er kan maar één functie zijn met de eigenschap $\int_a^b |x(t)|^p\, dt = 0$. Daarvoor moeten we een nieuw begrip 'functie' invoeren. De nieuwe functies noemen we ook *abstracte functies*: alle functies x en y met $\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt = 0$ worden dan in één equivalentieklasse gestopt. Deze (equivalentieklassen van) functies worden *Lebesgue integreerbare functies* genoemd. In veel toepassingen is zo'n $L^p(\Omega)$-functie-begrip nuttiger en handiger dan het klassieke functie-begrip.

We merken op dat we naast de L^p-functies met $p > 1$ ook nog een soort van limietgeval voor $p \to \infty$ kunnen beschouwen. Men introduceert dan de norm

$$\|x\| = \text{essential} \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|^p\,.$$

Essentieel supremum betekent dan 'supremum' op een meetbare verzameling, dwz dat grote waarden op een verzameling met 'maat nul' voor de bepaling van het supremum niet meetellen: grote waarden van de functie die niet bijdragen tot een integraal omdat alleen maar optreden in enkele punten, tellen niet mee voor het essentieel supremum. De juiste formalisering van wat hier vaag omschreven wordt, vind men in de 'maattheorie'[9, 17]

3.5 Lineaire deelruimten, factorruimten

Definitie 3.5.1 (Lineaire deelruimten). Zij B een Banachruimte met norm $\|\cdot\|$ en zij $L \subset B$ zodat geldt

$$x, y \in L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha x \in L & \forall \alpha \in \mathbb{C}\,, \\ x + y \in L\,, \end{cases}$$

dan is L een lineaire ruimte en de restrictie van $\|\cdot\|$ tot L is een norm op L. We noemen L nu een *lineaire deelruimte* van B.

Is L een gesloten deelruimte, dan is L volledig en dus een Banachruimte.

Stelling 3.5.2. Is L een lineaire deelruimte van B, dan is de afsluiting $\overline{L}$ weer een lineaire deelruimte van B (en dus een Banachruimte).
Bewijs: Als $x, y \in \overline{L}$, dan ook $\forall_{\alpha\in\mathbb{C}}\ \alpha x \in \overline{L}$ en $x + y \in \overline{L}$.
(Schrijf x en y als limiet van een rij punten in L). □

Opmerking 3.5.3. De afsluiting $\overline{L}$ wordt juist gevormd[8] door de punten x die te schrijven zijn als limiet van een rij punten in L. Immers als $x \in \overline{L}$ dan bevat de omgeving $U_{1/n}(x)$ een punt $x_n \in L$ voor $n \in \mathbb{N}$. Blijkbaar is $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Als omgekeerd x limiet is van een rij punten in L dan is $x \in \overline{L}$.

Lineair omhulsel Zij M een willekeurige niet-lege deelverzameling van B. Zij

$$L(M) = \{\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k \ |\ \ \alpha_i \in \mathbb{C},\ x_i \in M,\ i = 1, \ldots, k\ \}\,.$$

Dan is $L(M)$ een lineaire deelruimte van B, en wel de kleinste die M omvat.

Definitie 3.5.4 (lineair omhulsel). We noemen $L(M)$ het *lineair omhulsel* van M. De afsluiting $\overline{L(M)}$ heet het *gesloten lineair omhulsel* van M.

Voorbeeld 3.5.5. Zij B een willekeurige Banachruimte en M eindig. In dit geval is $L(M)$ eindig-dimensionaal en dus volledig. Omdat limieten eenduidig bepaald zijn geldt $L(M) = \overline{L(M)}$.

[8] NB. Dat geldt niet algemeen voor verzamelingen in een topologische ruimte.

Stelling 3.5.6. Met $B = \ell^1$ en M de verzameling van eenheidsvectoren e_i,

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,\ldots)\,, \\ e_2 &= (0,1,0,0,\ldots)\,, \\ &\ldots, \end{aligned}$$

is $L(M)$ de verzameling van vectoren $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, waarbij $x_i \neq 0$ voor slechts eindig veel indices i. We laten zien dat $\overline{L(M)} = \ell^1$, maw dat $L(M)$ dicht ligt in ℓ^1.
BEWIJS: Zij $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ een willekeurig element van ℓ^1. Dan is de reeks $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ convergent met de som $\|x\|$. Stellen we voor $n \in \mathbb{N}$

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$$

dan is $\quad x^{(n)} \in L(M)$ voor $n \in \mathbb{N} \quad$ en $\quad \|x - x^{(n)}\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i| \to 0 \quad$ voor $\; n \to \infty$.
Dus $x \in \overline{L(M)}$. □

Stelling 3.5.7. Laat nu $B = \ell^\infty$ en M weer de verzameling zijn van eenheidsvectoren e_i. Ook nu is $L(M)$ de verzameling van vectoren $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, waarbij $x_i \neq 0$ voor slechts eindig veel indices i. In dit geval $\overline{L(M)} = c_0$. Met c_0 geven we verzameling van nulrijen[9] in ℓ^∞ aan.
BEWIJS: (1.) Eerst bewijzen we $\overline{L(M)} \subset c_0$
Kies $x \in \overline{L(M)}$ willekeurig, dan $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{y \in L(M)} \|x - y\| < \varepsilon$ met $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, 0, , \cdots)$ en $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$ zodat $\sup_{j \in N} |x_j - y_j| < \varepsilon$. Hieruit volgt $\forall_{j>n} |x_j| < \varepsilon$, ofwel $\forall_\varepsilon \exists_{n \in \mathbb{N}}\; j > n \Rightarrow |x_j| < \varepsilon$. Dwz x is een nulrij
(2.) Nu bewijzen we $\overline{L(M)} \supset c_0$
Neem $x \in c_0$ willekeurig, dan weten we $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots)$ waarvoor $\forall_\varepsilon \exists_{n \in \mathbb{N}}\; j > n \Rightarrow |x_j| < \varepsilon$. We definieren $x^m = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, 0, \cdots) \in L(M)$. Nu geldt $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_\varepsilon} |x_n| < \varepsilon$ ofwel $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \sup_{n > n_\varepsilon} |x_n| < \varepsilon$. Dat betekent $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \|x - x_n\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$ ofwel de rij (x^m) convergeert in de norm van ℓ^∞ naar x, dus $x \in \overline{L(M)}$
Uit (1.) en (2.) volgt de stelling. □

Voorbeeld 3.5.8. Zij $B = C[(a, b)]$, waarbij $[a, b]$ een segment is. Zij M de verzameling der functies $1, t, t^2, \ldots$, op $[a, b]$. Het is duidelijk dat $L(M)$ de lineaire deelruimte is, bestaande uit polynomen op $[a, b]$. Men kan bewijzen dat $\overline{L(M)} = C[(a, b)]$.

Quotientruimten (of factorruimten) Tenslotte beschouwen we factorruimten. Zij B een Banachruimte en L een gesloten lineaire deelruimte. Dan is B onder meer een additieve groep en L een ondergroep van B. Dus valt B uiteen in nevenklassen $x + L$, $x \in B$; twee nevenklassen zij identiek als $x - y \in L$ en disjunct als $x - y \notin L$.

In de collectie S der nevenklassen van L definiëren we de som, het scalair veelvoud en de norm. En wel, als $X = x + L$, $Y = y + L$ $(x, y \in B)$ en $\alpha \in \mathbb{C}$, dan stellen we

$$\begin{aligned} X + Y &= (x + y) + L\,, \\ \alpha X &= \alpha X + L\,, \\ \|X\| &= \inf_{\xi \in X} \|\xi\|\,. \end{aligned}$$

Dus de norm van een element $X \in S$ is de afstand in B van de verzameling X tot de oorsprong. We laten zien dat bij de gegeven definities, S een Banachruimte is.

[9] Definitie: (x_n) is een *nulrij* $\;\Leftrightarrow\; \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{j>n} \; |x_j| < \varepsilon$.

Stelling 3.5.9. De nevenklassen van een gesloten lineaire deelruimte L van een Banachruimte B vormen, bij de gegeven definitie van som, scalair product en norm, weer een Banachruimte. Deze Banachruimte heet de *quotientruimte* van B naar L en wordt aangegeven als B/L.
BEWIJS: **(a)** S is een additieve groep (bekend uit de groepentheorie). **(b)** S is zelfs een lineaire ruimte, dus o.a. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$ (zoals eenvoudig is na te gaan). **(c)** de ingevoerde functie $\|\cdot\|$ is een norm op S. Immers **(1)** $\|X\| \geq 0$. **(2)** $\|L\| = 0$. **(3)** Zij $\|X\| = 0$, dan bestaat een rij punten $x_n \in X$ met de eigenschap dat $\|x_n\| < 1/n$, $(n \in \mathbb{N})$. Dan is $\|x_n\| \to 0$ voor $n \to \infty$. Dwz de rij punten x_n convergeert naar 0 in de ruimte B. Omdat de punten x_n alle tot X behoren, en x gesloten is, volgt dan dat dat $\mathbf{0} \in X$, dus dat $X = L$. **(4)** $\|\alpha X\| = \inf_{x\in X} \|\alpha x\|\| = |\alpha| \inf_{x\in X} \|x\| = |\alpha|\,\|X\|$. **(5)** Zijn X, Y twee willekeurige nevenklassen van L, dan geldt

$$\|X+Y\| = \inf_{x\in X, y\in Y} \|x+y\| = \inf_{x\in X, y\in Y} \|x\| + \|y\| = \inf_{x\in X} \|x\| + \inf_{y\in Y} \|y\| \,.$$

Dwz $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.
(d) De ruimte S is volledig in de ingevoerde norm. Dit wordt als volgt bewezen.
Zij (X_n) een fundamentaaalrij in S. Dan geldt dus $\|X_n - X_m\| \to 0$ als $n, m \to \infty$. I.h.b. is $\|X_n - X_{n+1}\| \to 0$ als $n \to \infty$.
<u>Geval 1:</u> De reeks $\sum \|X_n - X_{n+1}\|$ convergeert. Kies punten $y_1, y_2, \ldots \in B$ zodat geldt:

$$\begin{array}{ll} y_1 \in X_1 & \|y_1\| < \|X_1\| + \dfrac{1}{2} \\ y_2 \in X_2 - X_1 & \|y_2\| < \|X_2 - X_1\| + \dfrac{1}{4} \\ \cdots & \\ y_n \in X_n - X_{n-1} & \|y_n\| < \|X_n - X_{n-1}\| + \dfrac{1}{2^n} \\ \cdots & \end{array}$$

Dan is $\sum \|y_n\|$ convergent. Dus convergeert $\sum\ y_n$ naar een element x. D.w.z. er bestaat een element $x \in B$ zodat

$$\|(y_1 + \cdots + y_n) - x\| \to 0 \quad \text{voor } \ n \to \infty \,. \tag{3.9}$$

Anderzijds volgt uit de keuze van $y_1, \ldots, y_n$ dat $y_1 + \cdots + y_n \in X_n$, voor $n \in \mathbb{N}$. Stellen we $X = x + L$, dan is dus

$$(y_1 + \cdots + y_n) - x \in X_n - X \,.$$

Wegens (3.9) is dan $\|X - X_n\| \to 0$ voor $n \to \infty$. Dus de rij (X_n) convergeert naar X.
<u>Geval 2:</u> De reeks $\sum \|X_n - X_{n+1}\|$ convergeert niet. In dit geval kunnen we een stijgende rij indices n_k kiezen, $k \in \mathbb{N}$, zodat geldt

$$\|X_n - X_m\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{als } \ n, m \geq n_k \ .$$

Dan is

$$\|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{voor } \ k \in \mathbb{N}\,,$$

en dus is de reeks $\sum_k \|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}\|$. Wegens het vorige convergeert nu de rij (X_{n_k}) naar een element $X \in S$. Omdat (X_n) een fundamentaalrij is, convergeert dus ook de rij (X_n) naar X. $\square$

Voorbeeld 3.5.10. **(de ruimten c en c/c_0)** Zij c de ruimte bestaande uit de convergente getallenrijen $x = (x_1, x_2, \ldots)$, met $\|x\| = \sup_{k=1,2,\ldots} |x_k|$. Zij c_0 de ruimte der nulrijen $x =$

$(x_1, x_2, \ldots)$ met dezelfde norm. Beide rijen zijn gesloten lineaire deelruimten van ℓ^∞ en dus Banachruimten. Verder is c_0 een gesloten lineaire deelruimte van c. We beschouwen c/c_0.

Voor een willekeurig element $x = (x_1, x_2, \ldots)$ van c, stel met $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$, is $x + c_0$ juist de collectie van rijen $y = (y_1, y_2, \ldots)$ met $\lim_{k\to\infty} y_k = \xi$. Voor elk van deze rijen is

$$\|y\| = \sup_{k=1,2,\ldots} |y_k| \geq \|\xi|\,;$$

voor de speciale rij $y^{(0)} = (\xi, \xi, \ldots)$ is $\|y^{(0)}\| = |\xi|$. Dus is $\|x + c_0\| = |\xi|$, waarbij $\xi = \lim_{k\to\infty} x_k$.

Merk op dat de afbeelding $x + c_0 \to \xi$ een éénéénduidige lineaire afbeelding is van c/c_0 op $\mathbb{C}$. Blijkens het resultaat is deze afbeelding een isometrie.

3.6 ** Stefan Banach **

Stephan Banachs vader heette Stefan Greczek. We merken meteen op dat Banach niet zijn vaders achternaam was, maar Banach kreeg zijn voornaam. Stefan Grizek was ambtenaar bij de belastingen, die niet getrouwd was met Banach's moeder, die van het toneel verdween nadat Stefan gedoopt was toen hij vier dagen oud was, en van haar is niets meer bekend. De naam die opgegeven staat op zijn geboortebewijs is Katarzyna Banach. Sommigen denken dat dat een dienstbode van Stefan's moeder was, maar anderen beweren dat dat zij een wasvrouw was die voor Stefan zorgde toen hij heel jong was. Later probeerde Banach wel te achterhalen wie zijn moeder was maar zijn vader weigerde daarover iets te zeggen, behalve dat hij gezworen had haar identiteit niet te zullen bekendmaken.

Stefan Greczek kwam uit een klein dorp, Ostrowsko, ongeveer 50km ten zuiden van Krakau. Na zijn doop werd Banach naar Ostrowsko meegenomen, naar het huis van zijn grootmoeder. Maar toen Banach's grootmoeder ziek werd, regelde Stefan Greczek dat zijn zoon grootgebracht werd door Franciszka Plowa die in Krakau leefde met haar dochter Maria. Hoewel Banach nooit terugging om bij zijn grootmoeder te wonen, bezocht hij haar regelmatig toen hij opgroeide. Maria's oppasser was een Franse intelectueel, Juliusz Mien, en die herkende snel de talenten die Banach had. Mien leerde de jongen Frans spreken en hij bracht hem meer in het algemeen waardering voor educatie bij.

Stefan Banach, 1919

Banach volgde de lagere school in Krakau en hij verliet die school in 1902 om zijn opvoeding bij het Henryk Sienkiewicz Gymnasium No 4 in Krakau voort te zetten. Door een gelukkig toeval was een van de leerlingen in Banach's klas Witold Wilkosz die zelf ook wiskunde-professor zou worden. De school schijnt niet een bijzonder goede geweest te zijn en in 1906 vertrok Witold Wilkosz om naar een beter Gymnasium te vertrekken. Maar Banach bleef op het Henryk Sienkiewicz Gymnasium No 4 hoewel hij wel kontact bleef houden met Wilkosz.

In de eerste jaren op het Gymnasium haalde Banach hoge cijfers voor wiskunde en de natuurwetenschappen, wat zijn beste vakken waren. Een medeleerling herinnerde zich Banach in deze periode van zijn leven [R Kaluza, The life of Stefan Banach (Boston, 1996)]:

[Banach] ging heel plezierig met zijn medeleerlingen om, maar behalve in wiskunde was hij in niets anders geïnteresseerd. Als hij al sprak, sprak hij erg snel, zo snel als hij wiskundig kon denken. ... Wilkosz was net zo'n iemand. Voor die twee was er geen wiskundig probleem dat ze

niet snel konden kraken. En, terwijl Banach sneller was in wiskunde-problemen, was Wilkosz fenomenaal in het snel oplossen van natuurkunde-problemen, iets waar Banach geen interesse voor had.

De prachtige cijfers in zijn eerste jaren werden minder toen hij het eindexamen naderde. Hij haalde het examen in 1910, maar hij haalde het niet de kwalificatie 'met veel waardering', een kwalificatie die ongeveer een kwart van de leerlingen kreeg. Toen ze van school gingen wilden Banach en Wilkosz beide wiskunde studeren, maar omdat allebei het gevoel hadden dat er niets nieuws meer in de wiskunde ontdekt kon worden, kozen ze beide een ander vak. Banach koos technische wetenschappen en Wilkosz koos Oosterse talen. Dat twee van zulke uitstekende toekomstige wiskundigen om die reden zo'n beslissing namen, kan niet anders betekenen dan dat er niemand was die ze een goed advies kon geven.

Stefan Banach, 1936

Banach's vader had zijn zoon nooit veel steun gegeven, maar nu hij van school af was zei hij Banach heel direkt dat hij nu op zichzelf aangewezen was. Banach verliet Krakau en ging naar Lvov (Lublin) waar hij zich inschreef bij de Fakulteit Ingenieurswetenschappen, bij de Technische Universiteit van Lvov. Het is bijna zeker dat Banach, die geen enkele financiële ondersteuning had, zichzelf moest onderhouden door bijles te geven. Dit moet veel van zijn tijd in beslag hebben genomen en toen hij in 1914 afstudeerde had hem dat meer tijd gekost dan gewoon was. Hij was ook vaak terug geweest naar Krakau in de periode 1910-1914 toen hij in Lvov studeerde. Het is niet helemaal duidelijk wat Banach's plannen waren in 1914, maar toen in Augustus de Eerste Wereldoorlog uitbrak, kort na zijn afstuderen- vertrok Banach uit Lvov.

In de tijd dat Banach e studeerde stond Lvov onder Oostenrijks bestuur, wat het geval was sinds 1772 toen Polen verdeeld werd. Toen Banach jong was bestond Polen -in zekere zin- niet, omdat Rusland ongeveer de andere helft van het land bestuurde. Warschau had alleen een universiteit in de Russische taal en het lag in wat "Vistula Land" heette. Toen de Wereldoorlog uitbrak bezette Russische troepen Lvov. Banach was fysiek niet geschikt voor militaire dienst omdat hij met zijn linkeroog slecht zag. Gedurende de oorlog werkte hij in de wegenbouw, maar ondertussen bracht hij ook tijd door in Krakau, waar hij geld verdiende door daar op scholen les te geven. Hij volgde er ook wiskunde-colleges aan de Jagiellonian University van Krakau en, hoewel het niet zeker is, gelooft men dat hij daar de colleges van Zaremba bijwoonde.

Er was een gelukkig toeval in het voorjaar van 1916 dat een grote invloed op Banach's leven zou hebben. Steinhaus, die in militaire dienst was, zou een positie krijgen aan de Jan Kazimierz University in Lvov. Maar hij woonde in Krakau in het voorjaar van 1916, waar hij wachtte om de betrekking te aanvaarden. Hij wandelde 's avonds over straat in Krakau, zoals hij vertelt in zijn memoires: *Tijdens zo'n wandeling ving ik het woord "Lebesgue-maat" op. Ik ging naar de bank in het park en stelde mijzelf aan de twee geïnteresseerde wiskunde-jongens voor. Ze vertelden me dat ze nog een vriend hadden die Witold Wilkosz heette, en waar ze zeer hoog van opgaven. Die jongelui waren Stefan Banach en Otto Nokodym. Van toen af aan zouden we elkaar regelmatig ontmoeten, en ... we besloten een wiskundig genootschap op te richten*

Steinhaus vertelde Banach over een probleem waaraan hij zonder veel succes werkte. Na een paar dagen had Banach het belangrijkste idee dat nodig was om een tegenvoorbeeld te construeren, en Steinhaus en Banach schreven er samen een artikel over dat ze Zaremba aanboden ter publicatie. De oorlog vertraagde de publicatie, maar het artikel, Banach's eerste, verscheen in het *Bulletin van de Academie van Krakau* in 1918. Vanaf deze tijd, waarin hij zijn eerste resultaten met Steinhaus publiceerde, begon hij in snelle vaart belangrijke artikelen te schrijven. Het is natuurlijk onmogelijk te zeggen of, zonder de toevallige ontmoeting met Steinhaus, Banach zo'n researchloopbaan in de wiskunde gevolgd zou hebben. Het was ook via Steinhaus dat hij zijn toekomstige vrouw Lucja Braus leerde kennen. Ze trouwden in in Zakopane, een vakantie-plaatje in bergen, in 1920.

Op Steinhaus' initiatief werd de *Mathematical Society of Kraków* opgericht in 19191. Zaremba was voorzitter van de openingsbijeenkomst en werd als eerste voorzitter van de Society gekozen. In 1919 gaf Banach twee maal een lezing voor de Society en ging door met het produceren van top-artikelen. In 1920 werd de *Mathematical Society of Kraków* de *Polish Mathematical Society.*

Stefan Banach

In 1920 kreeg Banach ook een assistentschap bij Lomnicki aangeboden bij de Technische Universiteit van Lvov. Daar gaf hij wiskundecolleges en hij schreef onder Lomnicki's leiding een proefschrift. Dat was natuurlijk niet de gebruikelijke manier om een doctoraat te verwerven omdat Banach niet de nodige wiskunde-examens had afgelegd, maar voor hem werd een uitzondering gemaakt en hij mocht zijn proefschrift *On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations* verdedigen. Dit proefschrift wordt soms de geboorte van de *functionaalanalyse* genoemd.

In 1922 kreeg Banach zijn habilitatie van de Jan Kazimierz Universiteit in Lvov op grond van een tweede proefschrift over *maattheorie.* De universiteits-almanak van 1921-22 zegt daarover: *Op 7 april 1922 ontving Dr Stefan Banach, bij besluit van de faculteitsraad, zijn habilitatie voor docent in de wiskunde. Hij werd benoemd tot buitengewoon Hoogleraar op dat onderwerp bij besluit van het Staatshoofd op 22 Juli 1922.*

In 1924 werd Banach bevorderd tot gewoon hoogleraar en hij verbleef het academisch jaar 1924-25 in Parijs. De jaren tussen de twee wereldoorlogen waren heel druk voor Banach. Hij ging aan de ene kant door met het produceren van een stroom van belangrijke artikelen en tegelijkertijd schreef hij leerboeken voor meetkunde en algebra van de middelbare school. Hij was ook betrokken bij het publiceren van wiskunde. In 1929 begon hij, samen met Steinhaus, een nieuw tijdschrift *Studia Mathematica* en Banach en Steinhaus waren de eerste redacteuren daarvan. Het redactioneel beleid was; *de focus te leggen op het gebied van de functionaalanalyse en aanverwante onderwerpen.*

Een andere belangrijke onderneming op uitgeversgebied was een nieuwe reeks boeken *Mathematical Monographs.* Deze serie werd opgezet onder het redacteurschap van Banach en Steinhaus uit Lvov, en Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, en Sierpinski uit Warschau. Het eerste deel van de serie *Théorie des Opérations linéaires* was geschreven door Banach en verscheen in 1932. Het was de Franse versie van een boek dat eerder, in 1931, in het Pools was verschenen, en het werd snel een klassiek werk. In 1936 gaf Banach een plenaire lezing voor het Internationaal Wiskunde Congres in Oslo. In die lezing beschreef hij het werk van gehele Lvov-school en hij sprak ook over zijn plannen om hun ideeën verder te ontwikkelen.

Een andere belangrijke gebeurtenis was dat Kuratovski in 1927 aan de Technische Universiteit Lvov werd benoemd, en daar tot 1934 bleef werken. Banach werkte met hem samen en ze schreven in deze periode samen artikelen.

Banach had een onconventionele manier van werken. Hij hield ervan met zijn collega's in de café's van Lvov wiskunde te doen. In *Adventures of a mathematician* (New York, 1976) herinnert Ulam zich geregelde sessies het Schots Café: *Het was moeilijk om meer te drinken en langer te blijven dan Banach bij deze bijeenkomsten. We discussieerden over problemen die daar opgeworpen werden, zelfs als na een paar uur denken de oplossing nog niet duidelijk was. Het was vaak zo dat Banach de volgende dag verscheen met een paar blaadjes papier waarop dan het principe van de oplossing stond die hij ondertussen gevonden had.*

Het Schots Café in Lvov

Er is nog een plaatje van het Schots Café.

Andrzej Turowicz, die ook wiskunde professor aan de Kazimierz University in Lvov was, gaf ook een beschrijving van Banach's manier van werken: *[Banach] bracht meestal zijn dagen in café door, niet in het gezelschap van anderen, maar in zijn eentje. Hij hield van het lawaai en de muziek. Er waren gevallen dat, nadat de café 's nacht gesloten waren, hij naar het treinstation liep waar het cafetaria 24 uur per dag open was. Boven een glas bier zat hij daar dan over zijn problemen te denken.*

In 1939, vlak voor de 2de Wereldoorlog, werd Banach tot President van de Polish Mathematical Society gekozen. In het begin van de oorlog bezetten de Soviet troepen Lvov. Voor de oorlog begon had Banach op goede voet gestaan met de wiskundigen uit de Soviet Unie en hij had verschillende keren Moskou bezocht. Hij werd door het nieuwe Soviet bestuur goed behandeld. Hij kon zijn leerstoel bij de Universiteit behouden en hij werd decaan van de Fakulteit der Natuurwetenschappen van de Universiteit die nu Ivan Franko Universiteit genoemd werd. Banach's vader kwam naar Lvov, vluchtend voor de duise legers die naar Krakau optrokken. In deze periode was het leven weinig veranderd voor Banach die doorging met zijn onderzoek, het schrijven van leerboeken, college geven en zijn sessies in de cafés. Sobolev en Alexandrov bezochten Banach in Lvov in 1940, terwijl Banach conferenties in de Soviet Unie bijwoonde. Hij was in Kiev toen Duitsland de Soviet Unie binnenviel en hij ging onmiddellijk terug naar zijn familie in Lvov.

De Nazi-bezetting van Lvov in Juni 1940 hield in dat Banach onder zeer moeilijke condities moest leven. Hij werd gearresteerd onder verdenking in Duits geld te handelen maar hij werd na drie weken weer vrijgelaten. Hij overleefde een periode waarin Poolse academici werden vermoord, maar zijn promotor Lomnici stierf in de nacht van 3 Juli 1941 toen veel massamoorden gepleegd werden. Tegen het einde van 1941 werkte Banach in een Duits instituut voor infectieziekten waar hij de luizen voerde. [10]

[10] Since feeding lice occupied the feeders for only one hour per day, and since the University (with exception of the Institute of Technology, renamed by Germans as "Technische Fachkurse") was closed by Nazis, the 'feeders' had the remaining time left for organizing the underground University courses and for other educational and patriotic activities. For instance, I was supervising a 'breeding unit' consisting of feeders who were mostly mathematicians of the famous Lwów school of mathematics, including the world famous professor, Stefan Banach, and others including Jerzy Albrecht, Felix Baranski, Bronislaw Knaster, Wladyslaw Orlicz, and also other scientists like

Stefan Banach, 1944

Gedurende de gehele tijd van de Nazi-bezetting van Lvov -tot Juli 1944- bestond zijn leven uit het voeren van luizen. Zodra de Soviet troepen Lvov heroverden, hernieuwde Banach zijn contacten. Buiten Moskou ontmoette hij Sobolev, maar kennelijk was hij in die tijd ernstig ziek. Sobolev zei, toen hij een voordracht hield voor bij een conferentie ter Banach's nagedachtenis (R Kaluza, The life of Stefan Banach (Boston, 1996)): *Ondanks zware sporen die de oorlogsjaren onder de Duitse bezetting hadden achtergelaten, en ondanks zijn ernstige ziekte die zijn krachten ondermijnde, waren Banach's ogen nog steeds levendig. Hij bleef dezelfde sociabele, prettige en bijzonder wel-menende en charmante Stefan Banach die ik in Lvov vóór de oorlog gekend had. En dat is ook hoe hij in mij herinnering zal blijven: met een groot gevoel voor humor, een energiek mens, een prachtige ziel en een groot talent.*

Banach was van plan na de oorlog naar Krakau te gaan om de wiskunde-leerstoel aan de Jagiellonian Universiteit te bezetten, maar hij stierf in 1945 aan longkanker.

Banach grondveste de moderne functionaalanalyse en verzorgde belangrijke bijdragen aan de theorie van topologische vectorruimten. Bovendien heeft hij bijdragen aan de maattheorie, integratie, verzamelingenleer en orthogonale reeksen op zijn naam staan. In zijn proefschrift, geschreven in 1920, gaf hij een axiomatische definitie van wat we nu *Banach ruimte* noemen. Het idee werd in dezelfde tijd ook door anderen geïtroduceerd, bijvoorbeeld door Wiener die het begrip introduceerde maar de theorie niet ontwikkelde. De naam *Banach ruimte* werd ingevoerd door Fréchet (1878 - 1973).

3.7 Hilbert ruimten

3.7.1 Definities en voorbeelden

We gaan hier de begrippen genormeerde lineaire deelruimte en Banachruimte verder specialiseren.

Definitie 3.7.1 (inproduct). Een *inproduct* op een lineaire ruimte R is een complexwaardige functie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op $R \times R$ met de volgende eigenschappen

$$\begin{array}{ll} \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} & \forall x, y \in R, \\ \langle x, x \rangle \geq 0 & \forall x \in R, \\ \langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 & \forall x \in R, \\ \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle & \forall x_1, x_2, y \in R, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}. \end{array}$$

Is op R een inproduct gegeven dan is R een *pre-Hilbert ruimte*, of een lineaire ruimte met inproduct.

Tadeusz Baranowski (biochemist), Ludwik Fleck (bacteriologist; Fleck, 1947), Seweryn Krzemieniewski and his wife Helena (both famous bacteriologists), and Krukowski (archeologist). Famous artist Stanislaw Skrowaczewski (with whom I studied piano under Florentyna Listowska) was also a lice feeder; he became a composer and a famous conductor of the Minneapolis Symphony Orchestra, whom I was meeting frequently at his concerts in Madison, WI, in the Sixties or Seventies. (Waclaw Szybalski, `http://www.lwow.com.pl/Weigl/in-memoriam.html`)

Merk op dat uit de eerste eis in de definitie al volgt dat $\langle x, x\rangle$ reëel is voor alle $x \in \mathbb{R}$. Het inproduct is dus een lineaire operator in de eerste component, en een *anti-lineaire* operator in de tweede. Zo'n operator (lineair in de eerste en anti-lineair in de tweede) wordt ook wel *sesquilineaire* operator genoemd. Een *bilineaire* operator is lineair in beide operanden.

Voor het inproduct hebben we dus ook $\forall x, y_1, y_2 \in R,\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \overline{\langle \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, x\rangle} = \overline{\beta_1}\,\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta_2}\,\langle x, y_2\rangle\,.$$

We zullen aantonen dat een lineaire ruimte met inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tevens een genormeerde ruimte is met norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,. \tag{3.10}$$

Stelling 3.7.2. Zij R een lineaire ruimte met inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dan geldt

$$\forall x, y \in R \qquad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,. \tag{3.11}$$

Opmerking 3.7.3. De ongelijkheid (3.10) heet de ongelijkheid van *Cauchy-Schwarz* of van *Cauchy-Boenjakowski*. Het bewijs verloopt, afgezien van de complexiteit van R, als in het geval van de reële ruimte $\mathbb{R}^k$.

Bewijs: Neem twee punten $x, y \in R$. We mogen aannemen $\langle x, y\rangle \neq 0$. We onderzoeken de kwadratische vorm ($\tau \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \|x + \tau y\|^2 = \langle x + \tau y, x + \tau y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \tau\langle y, x\rangle + \overline{\tau}\langle x, y\rangle + |\tau|^2\langle y, y\rangle \end{aligned}$$

Voor willekeurige τ is $Q(\tau)$ reëel en groter dan 0. De termen $\tau\langle y, x\rangle$ en $\overline{\tau}\langle x, y\rangle$ zijn elkaars complex geconjugeerden. Kiezen we $\tau = \frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|} t$ met $t \in \mathbb{R}$, dan krijgen we

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= \|x + \tau y\|^2 = \langle x + \tau y, x + \tau y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \tau\langle y, x\rangle + \overline{\tau}\langle x, y\rangle + |\tau|^2\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2t\ |\langle x, y\rangle| + t^2\langle y, y\rangle \qquad \geq 0 \end{aligned}$$

Voor de determinant van de kwadratische vorm geldt dus

$$|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\ \ \langle y, y\rangle\ \geq 0$$

ofwel $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\ \ \langle y, y\rangle}$. Daarmee is (3.11 bewezen. □

Stelling 3.7.4. De vorm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ is een norm op R.
Bewijs: Uit de eigenschappen van het inproduct volgt direct dat $\|x\| \geq 0$ en $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$. Verder is

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = |\alpha|^2 \cdot \|x\|^2\,,$$

dus $\forall_{\alpha\in\mathbb{C}, x\in R}\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Tenslotte is wegens Stelling 3.7.2 (we merken op dat $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$ reëel is!)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &\leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2|\langle x, y\rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\,. \end{aligned}$$

Dus $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Gevolg 3.7.5.
$$\|x\| = \sup_{y \in R} \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|}\,, \tag{3.12}$$
want $\forall_{x,y\in R}\ |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\ \|y\|$ en als we y gelijk aan x nemen krijgen we $\langle x,y\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$.

Lemma 3.7.6. Het inproduct is continu in beide variabelen tegelijk.
BEWIJS:
$$\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle = \langle x-x_0,y\rangle + \langle x_0,y-y_0\rangle\,,$$
dus wegens Cauchy-Schwarz
$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| &\le \|x-x_0\|\cdot\|y\| + \|x_0\|\cdot\|y-y_0\| \\ &\le \|x-x_0\|\cdot(\|y_0\|+\|y-y_0\|) + \|x_0\|\cdot\|y-y_0\| \\ &\le \|x-x_0\|\cdot\|y_0\| + \|y-y_0\|\cdot\|x_0\| + \|x-x_0\|\cdot\|y-y_0\| \end{aligned}$$
□

Bij de definitie van Banachruimte sluit aan:

Definitie 3.7.7. Een *Hilbertruimte* is een lineaire ruimte met inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$, die volledig is in de bijbehorende metriek
$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}\,.$$

Uit deze definitie volgt direct dat een Hilbertruimte ook een Banachruimte is.

Stelling 3.7.8. Zij R een lineaire ruimte met inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en zij $\widetilde{R}$ het volledig omhulsel van R als metrische ruimte, dan is $\widetilde{R}$ een Hilbertruimte als we stellen:
voor willekeurige $\alpha\in\mathbb{C}$ en $x,y\in R$ en met (x_n) en (y_n) bijbehorende fundamentaalrijen in R.
$$\begin{cases} x+y &= \lim_{n\to\infty} \quad (x_n+y_n)\,, \\ \alpha x &= \lim_{n\to\infty} \quad (\alpha x_n)\,, \\ \langle x,y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \quad \langle x_n,y_n\rangle\,. \end{cases}$$

BEWIJS: De opgeschreven limieten bestaan en de laatste is eindig, o.a. omdat $\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_m,y_m\rangle \to 0$ voor $n\to\infty$. Verder is $\widetilde{R}$ een lineaire ruimte en $\langle\cdot,\cdot\rangle$ een inproduct op $\widetilde{R}$. De bij dit inproduct behorende metriek is ook de metriek van $\widetilde{R}$ als volledig omhulsel. □

Voorbeeld 3.7.9. De ruimte $\mathbb{C}^k$. De vorm $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^k x_i\overline{y}_i$ is een inproduct op $\mathbb{C}^k$. We hebben bijvoorbeeld $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$. De bijbehorende norm is $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k |x_i|^2}$. In deze norm is $\mathbb{C}^k$ volledig (zie sectie 3.4). Dus is $\mathbb{C}^k$ met het genoemde inproduct een Hilbertruimte.

Voorbeeld 3.7.10. De ruimte ℓ^2. Deze ruimte bestaat uit de complexe getallenrijen $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ met $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty$. Som, scalair veelvoud en inproduct worden gedefinieerd door
$$\begin{cases} x+y &= (x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \\ \alpha x &= (\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n) \\ \langle x,y\rangle &= \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i} \end{cases} \tag{3.13}$$
We laten zien dat deze definities zinvol zijn.
(a) We hebben algemeen [11]
$$|x_k+y_k|^2 \le 2\left(|x^k|^2+|y_k|^2\right)\,.$$

[11] Immers: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ met $a=\Re x_k$, $b=\Re y_k$ en $a=\Im x_k$, $b=\Im y_k$.

Als vanwege $x, y \in \ell^2$ de reeksen $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ en $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2$ convergeren, convergeert ook de reeks $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2$. Dus $x + y \in \ell^2$
(b) Als $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ convergeert, dan ook $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^2$ voor $\alpha \in \mathbb{C}$.
(c) Als $x, y \in \ell^2$ dan convergeert de reeks $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ absoluut, omdat

$$|x_k \overline{y_k}| = |x_k| \cdot |y_k| \leq \frac{1}{2} \left(|x_k|^2 + |y_k|^2 \right) \qquad \forall_{k \in \mathbb{N}} .$$

Zonder moeite gaat men na dat bij de gegeven definities ℓ^2 een lineaire ruimte en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct op ℓ^2 is.
We laten zien dat ℓ^2 volledig is.
Bewijs:
Zij (x^n) een fundamentaalrij in ℓ^2. Als in Voorbeeld 3.4.9 in het geval van ℓ^1 hebben we[12]:

1.) Er bestaat een getal $C > 0$ met
$$\|x^n\| \leq C \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$$
want immers is de rij der normen $\|x^n\|$ een fundamentaalrij van reële getallen.

2.) De rij der rijen $x^n = (x_1^n, x_2^n, \cdots, x_k^n, \cdots)$ convergeert componentsgewijs, dwz voor elke k afzonderlijk convergeert $(x_k^n)_{n=1}^{\infty}$ naar een getal x_k. Dit volgt uit
$$|x_k^n - x_k^m| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m|^2} = \|x^n - x^m\| .$$

3.) De rij $x = (x_1, x_2, \ldots)$ behoort tot ℓ^2 en we hebben $\|x\| \leq C$. Om dit te bewijzen introduceren we, voor een willekeurig element $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^2$,
$$S_k(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2} \qquad \forall_{k \in \mathbb{N}} .$$
We hebben $\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad S_k(y) \leq \|y\|$ en $\lim_{k \to \infty} S_k(y) = \|y\|$.
We beschouwen nu de geconstrueerde rij $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Uit (2.) en de definitie van S_k volgt dat
$$S_k(x) = \lim_{k \to \infty} S_k(x^n) \qquad \forall_{k \in \mathbb{N}} .$$
Daarbij is $\forall_{k,n \in \mathbb{N}} \quad S_k(x^n) \leq \|x^n\| \leq C$ wegens **(1)**. Dan is ook $\forall k \in \mathbb{N} \quad S_k(x) \leq C$. Dus is $\|x\| \leq C$, ihb $x \in \ell^2$.

4.) De rij (x^n) convergeert naar x in de norm van ℓ^2. Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt immers dat
$$\|x^n - x^m\| < \varepsilon \qquad \forall_{n,m > n_\varepsilon}$$
door vergelijken van $S_k(x^n - x^m)$ en $S_k(x^n - x)$ vindt men dan dat
$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \|x^n - x\| < \varepsilon .$$
Hiermee is bewezen dat, onder de definitie (3.13), ℓ^2 een Hilbertruimte is.

□

[12] Merk op dat hier weer in x^n het getal n niet een macht van x aangeeft, maar een boven-index n is, en dat x^n een rij is met elementen $x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, \cdots, x_k^n, \cdots$.

Opmerking 3.7.11. Krachtens Stelling 3.7.2 geldt dat in $\mathbb{C}^k$ en ℓ^2 de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. Bij expliciet uitschrijven komt er:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y}_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 ,$$

respectievelijk

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k\right|^2 \leq \sum_{i=k}^{\infty} |x_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 .$$

Opmerking 3.7.12. De ruimten ℓ^1 en ℓ^2 zijn speciale gevallen van de ruimte ℓ^p, $(p \geq 1)$, bestaande uit complexe getallenrijen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ met $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ en met norm $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Convergeert $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p_0}$ voor een gegeven rij $(x_, x_2, \ldots)$ en een gegeven p_0, dan convergeert de rij ook voor $p > p_0$ en is de rij begrensd, terwijl voor $p \to \infty$ de uitdrukking $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$ nadert tot $\sup_k |x_k|$, dus tot de norm van x als element van ℓ^∞. Voor alle $p \geq 1$ is ℓ^p een Banachruimte. We geven hier geen bewijs. In het speciale geval $p = 2$ hebben we een Hilbertruimte, zoals we boven bewezen hebben.

Opmerking 3.7.13. Evenals voor ℓ^1 geldt ook voor ℓ^2 dat het lineair omhulsel der eenheidsvectoren dicht ligt in ℓ^2. Want als $x \in \ell^2$ en $x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ voor $n = 1, 2, \ldots$, dan is

$$\left\|x - x^{(n)}\right\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2} \quad \to \quad 0 \qquad \text{voor} \quad n \to \infty .$$

3.7.2 Orthoplement van een lineaire deelruimte

Zij H een Hilbertruimte en G een lineaire deelruimte.

Definitie 3.7.14 (loodrecht). Twee elementen $x, z \in H$ heten *onderling loodrecht* of *orthogonaal*, en we schrijven $z \perp z$, als $\langle x, z\rangle = 0$.
Verder zeggen we dat z *loodrecht* staat op G als $\forall_{x\in G}\ x \perp z$.

Stelling 3.7.15. De verzameling der elementen $z \in H$ met $z \perp G$ is een gesloten lineaire deelruimte van H.
Bewijs: Als $z_1 \perp G$ en $z_2 \perp G$ dan is $\forall_{x\in G}\ \langle z_1, x\rangle = \langle z_2, x\rangle = 0$, dus

$$\forall_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}}\ \forall_{x\in G} \qquad \langle \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, x\rangle = 0$$

dwz

$$\forall_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}} \qquad \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \perp G .$$

Is $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ z_n \perp G$ en $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, dan hebben we

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, x\in G} \qquad \langle z_n, x\rangle = 0$$

dus, vanwege de continuïteit van het inproduct $\forall_{x\in G}\ \langle z, x\rangle = 0$, dwz $z \perp G$. $\square$

Definitie 3.7.16. De verzameling van alle elementen z zodat $z \perp G$ heet het *orthoplement* van G, en wordt aangegeven met $G^\perp$.

In het volgende maken we de extra veronderstelling dat G gesloten is.

Lemma 3.7.17. Zij G een gesloten lineaire deelruimte van H en zij $z \in H$ willekeurig. Dan bevat G een punt x_0 met minimale afstand tot z.

Opmerking 3.7.18. In verband met de mogelijk oneindig-dimensionaliteit van G volgt de bewering niet direct uit het feit dat G gesloten is. De analoge bewering voor Banachruimten is niet algemeen waar. Men moet nagaan dat het punt eenduidig bepaald is.

BEWIJS: (van Lemma 3.7.17) Stel $d = \inf_{x\in G} \|z-x\|$. Dan bestaat een rij elementen $x_n \in G$ met $\lim_{n\to\infty} \|z - x_n| = d$. We beschouwen een drietal punten z, x_n, x_m en passen de formule voor de zwaartelijn in een driehoek toe:

$$\left\| z - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 + \frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 = \frac{1}{2}\|z - x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|z - x_m\|^2 .$$

Deze formule is eenvoudig te verifiëren in de vorm (neem $x = z - x_n$, $y = z - x_m$)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) .$$

Zij nu $\eta > 0$ willekeurig. Dan is, voor n, m voldoende groot $\|z - x_n\| < d + \eta$ en $\|z - x_m\| < d + \eta$. Verder is $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in G$ en dus $\|z - \frac{1}{2}(x_n + x_m)\| \geq d$. Dus, als n en m voldoende groot zijn,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|z - x_n\|^2 + 2\|z - x_m\|^2 - 4\|z - \frac{1}{2}(x_n + x_m)\|^2 \\ &= 2(d + \eta)^2 + 2(d + \eta)^2 + -4d^2 = 8d\eta + 4\eta^2 . \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat (x_n) een fundamentaalrij is. Deze convergeert naar een punt x. Daarbij geldt:
1) $x \in G$ omdat G gesloten is, en
2) $\|z - x\| = d$ omdat $\lim_{n\to\infty} \|z - x_n\| = d$ en $\lim_{n\to\infty} \|z - x_n\| = \|z - x\|$.
Daarmee is het lemma bewezen. □

Lemma 3.7.19. Laat G, z en x_0 zijn als hierboven (Lemma 3.7.17). Dan is $z - x_0 \perp G$, dwz x_0 is de projectie van z op G.

BEWIJS: Zij $x \in G$ willekeurig, τ een complexe variabele en $Q(\tau) = \|z - x_0 - \tau x\|^2 - \|z - x_0\|^2$. dan geldt $Q(\tau) \geq 0$. Verder is

$$Q(\tau) = |\tau|^2 \cdot \|x\|^2 - \overline{\tau}\langle z - x_0, x\rangle - \tau\langle x, z - x_0\rangle .$$

Neem eens aan dat $\langle z - x_0, x\rangle \neq 0$. Stel $\tau = \frac{\langle z-x_0,x\rangle}{|\langle z-x_0,x\rangle|} t$ met $t \in \mathbb{R}$. Dan komt er

$$Q(\tau) = t^2 \cdot \|x\|^2 - 2t|\langle z - x_0, x\rangle| .$$

Het rechterlid is een reële kwadratische vorm die niet steeds ≥ 0 is, in strijd met de aanname. Dus $\langle z - x_0, x\rangle = 0$ voor all $x \in G$. Daarmee is het lemma bewezen. □

Definitie 3.7.20 (directe som). Zij H een Hilbertruimte en laten G_1, G_2 twee gesloten lineaire deelruimten van H zijn. Dan H de *directe som* van G_1 en G_2 en we schrijven $H = G_1 \oplus G_2$, als geldt:
1.) elk element $z \in H$ is eenduidig te schrijven als $x + y$, met $x \in G_1$ en $y \in G_2$;
2.) G_1 en G_2 staan loodrecht op elkaar: dwz $\forall_{x\in G_1, y\in G_2}\ \langle x, y\rangle = 0$.

Opmerking 3.7.21. In het geval van een Banachruimte hanteert men ook het begrip *directe som*, met dezelfde notatie; men laat dan echter de tweede eis vallen.

Uit de twee Lemmas 3.7.17 en 3.7.19 leiden we nu af:

Stelling 3.7.22. Zij H een Hilbertruimte en G een gesloten lineaire deelruimte, dan is $H = G \oplus G^{\perp}$ en $G^{\perp\perp} = G$.
Bewijs:
(1.) Neem een willekeurig element $z \in H$. Laat x_0 bepaald zijn als in Lemma 3.7.17 en zij $z - x_0 = y_0$. Dan geldt: $z = x_0 + y_0$, $x_0 \in G$, $y_0 \in G^{\perp}$.
(2.) Zij $z = x_1 + y_1$ een tweede voorstelling van z zodat $x_1 \in G$, $y_1 \in G^{\perp}$, dan is $x_0 - x_1 = y_1 - y_0$ en dus $x_0 - x_1 \in G$ en $x_0 - x_1 \in G^{\perp}$. Dus $\langle x_0 - x_1, x_0 - x_1\rangle = 0$ waaruit volgt $x_0 = x_1$ en derhalve ook $y_0 = y_1$.
(3.) Is $x \in G$ dan $x \perp G^{\perp}$. Dus $G \subset G^{\perp\perp}$.
(4.) Zij $z \in G^{\perp\perp}$, dan kunnen we schrijven

$$z = x + y, \quad \text{met} \quad x \in G, \quad \text{en} \quad y \in G^{\perp} .$$

Wegens $z \in G^{\perp\perp}$ is $\langle z, y\rangle = 0$. Ook is $\langle x, y\rangle = 0$. Dus $\langle y, y\rangle = 0$ en derhalve $y = 0$, dwz $z \in G$. Dus $G^{\perp\perp} \subset G$. Hiermee is de stelling volledig bewezen. □

Naast $G^{\perp}$ kunnen we beschouwen de quotiëntruimte H/G. We beschouwen speciaal de afbeelding van $G^{\perp}$ in H/G, gegeven door

$$y \to y + G \quad (y \in G^{\perp}) . \tag{3.14}$$

Deze afbeelding is zeker lineair:

$$\begin{cases} (y_1 + y_2) + G &= (y_1 + G) + (y_2 + G) , \\ \alpha y + G &= \alpha(y + G) . \end{cases}$$

Verder is de afbeelding surjectief, want als $z \in H$, dan kunnen we schrijven $z = x + y$ met $x \in G$ en $y \in G^{\perp}$, en is dus $z + G = y + G$ met $y \in G^{\perp}$. Tenslotte geldt:

$$\|y + G\| = \inf_{x \in G} \|x + y\| = \|y\| .$$

Samenvattend zeggen we dat de afbeelding (3.14) een isometrie geeft tussen $G^{\perp}$ en H/G. Zie ook de definitie in Sectie 3.7.4.

3.7.3 Orthonormale stelsels

In hetvolgende doorloopt λ een vaste indexverzameling Λ, mogelijk overaftelbaar.

Definitie 3.7.23 (orthonormaal stelsel). Het stelsel vectoren (e_λ) in een Hilbertruimte H heet een *orthonormaal stelsel* als geldt:

$$\|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda ,$$

$$\langle e_\lambda, e_{\lambda'}\rangle\| = 0 \quad \text{als} \quad \lambda \neq \lambda' .$$

Maw de vectoren e_λ hebben lengte 1 en zijn onderling loodrecht.

De voorwaarden in de definitie hebben direct tot gevolg dat de vectoren e_λ (eindig) lineair onafhankelijk zijn, want als

$$\alpha_1 e_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_k e_{\lambda_k} = 0$$

voor zekere indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ en zekere coefficienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dan is $\langle \alpha_1 e_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_k e_{\lambda_k}, e_{\lambda_i} \rangle = 0$ ofwel $\alpha_1 = 0$ voor $i = 1, \ldots, k$.
Voor rijen van vectoren geldt:

Stelling 3.7.24. Zij H een Hilbertruimte en (x_k) een willekeurige aftelbare rij vectoren in H. Dan bestaat er een afbrekende orthonormale rij (e_k), zodat de verzameling der vectoren x_k hetzelfde lineair omhulsel heeft als de verzameling der vectoren (e_k). Dus, met een voor de hand liggende notatie

$$L(x_1, x_2, \ldots) = L(e_1, e_2, \ldots)$$

Bewijs: We lopen de rij $x_1, x_2, \ldots$ langs en schrappen daarbij elk element dat een lineaire combinatie is van vorige elementen. Op deze wijze krijgen we een oneindige, of een afbrekende rij lineair onafhankelijke vectoren. We geven deze rij weer aan met $x_1, x_2, \ldots$.

In het bijzonder is $x_1 \neq 0$. We kunnen dus nemen $e_1 = x_1/\|x_1\|$ en we zien $L(x_1) = L(e_1)$ en $\|e_1\| = 1$.

Laat nu eerst voor $k = 2$, en later voor $k = 3, 4, \ldots$,

$$\begin{array}{c} L(x_1, \ldots, x_{k-1}) = L(e_1, \ldots, e_{k-1}) = L_{k-1} \\ \text{met} \quad \forall_{j<k}\ \|e_j\| = 1 \quad \text{en} \quad \forall_{i\neq j; i,j<k}\ \langle e_i, e_j \rangle = 0\ . \end{array} \tag{3.15}$$

Dan is L_{k-1} eindig-dimensionaal, dus gesloten, en uit Stelling 3.7.22 volgt dan dat

$$x_k = z_k + y_k \qquad \text{met} \quad z_k \in L_{k-1} \qquad \text{en} \quad 0 \neq y_k \in L_{k-1}^{\perp}\ .$$

We definieren nu $e_k = y_k/\|y_k\|$ en zien direct dat

$$L(x_1, \ldots, x_k) = L(e_1, \ldots, e_{k-1}) = L_k\ .$$

Verder geldt $\forall_{i,j<k}\ \langle e_i, e_k \rangle = 0$ en $\|e_k\|^2 = \langle e_k, e_k \rangle = \langle y_k, y_k \rangle / \|u_k\|^2 = 1$, zodat (3.15) geldt voor $k = 3$. Op deze wijze kunnen we dus een rij $e_1, e_2, \ldots$ construeren zodat (3.15) geldt voor $k = 2, 3, 4, 5, \ldots$. Daarmee is de stelling bewezen. □

Het in het bovenstaande bewijs beschreven proces heet *orthonormaliseren* en is afkomstig van *Schmidt*.[13]. Op grond van Stelling 3.7.24 mogen we bij kwesties betreffende lineaire deelruimten voortgebracht door een rij vectoren, er van uitgaan dat er een equivalente rij orthonormale vectoren is.

Stelling 3.7.25. Zij (e_k) een orthonormale rij in een Hilbertruimte H. Dan geldt dat een reeks van de vorm $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ convergeert dan en slechts dan als $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ convergeert. Is die reeks convergent met som x, dan geldt:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2\ ,$$

en

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \qquad \langle x, e_k \rangle = \alpha_k.$$

[13]Erhard Schmidt (1876–1959). We moeten echter wel opmerken dat Laplace het *Gram-Schmidt proces* eerder presenteerde dan Gram of Schmidt(1907).

Bewijs: Stel $\forall_{k\in\mathbb{N}}\quad x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$. Voor $k > j$ is

$$\|x_k - x_j\|^2 = \left\langle \sum_{i=j+1}^{k} \alpha_i e_i, \sum_{i=j+1}^{k} \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i=j+1}^{k} |\alpha_i|^2 \ .$$

Dus (x_n) is een fundamentaalrij dan en slechts dan als de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ convergeert. Daar H volledig is, geldt dus dat de rij (x_k) convergeert, dwz dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ convergeert desda de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$. Dat is de eerste bewering van de stelling.

Voor de partiële sommen geldt verder

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \qquad \|x_k\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2$$

$$k \geq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_k, e_j\rangle = \alpha_j \ .$$

Laat men hierin k naar ∞ gaan, dan volgen de laatste beweringen van de stelling. □

We beschouwen nu willekeurige orthonormale stelsels, We bewijzen

Stelling 3.7.26. Zij $M = (e_\lambda)$ een orthonormaal stelsel in een Hilbertruimte H. Zij $G = \overline{L(M)}$ en zij z een willekeurig punt van H. Dan geldt:

(1) er zijn ten hoogste aftelbaar oneindig veel indices λ met $\langle z, e_\lambda\rangle \neq 0$.
(2) $\sum_\lambda |\langle z, e_\lambda\rangle|^2 \leq \|z\|^2$. Dit is de *ongelijkheid van Bessel*.
(3) $\|z\|^2 - \sum_\lambda |\langle z, e_\lambda\rangle|^2 = d^2$, waarbij d de afstand is tussen z en G.
(4) $d = \|z - x_0\|$, als $x_0 = \sum_\lambda \langle z, e_\lambda\rangle\, e_\lambda$.

Opmerking 3.7.27. De reeks in (2) is een gewone aftelbare reeks wegens (1). Hetzelfde geldt voor de reeks in (4). Deze reeks is convergent wegens (2) en de vorige stelling.

Bewijs: (van Stelling 3.7.26) We beschouwen eerst een willekeurig eindig stelsel indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. De lineaire ruimte $L(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_k})$ is eindig-dimensionaal, dus gesloten. De afstand van z tot een willekeurig punt $x = \alpha_1 e_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_k e_{\lambda_k}$ van deze deelruimte is minimaal als

$$z - x \perp L(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_k}) \ , \tag{3.16}$$

wegens de Lemmata 3.7.17 en 3.7.19. Aan de relatie (3.16) is voldaan als $\langle z, e_{\lambda_i}\rangle = \langle x, e_{\lambda_i}\rangle$ voor $i = 1, \ldots, k$. We concluderen dat de afstand van z tot $x \in L(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_k})$ minimaal is als geldt

$$\alpha_i = \langle z, e_{\lambda_i}\rangle \qquad (i = 1, \ldots, k) \ , \tag{3.17}$$

Bij gegeven stelsel $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_k})$ voeren we in

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \langle z, e_{\lambda_i}\rangle\, e_{\lambda_i} \ . \tag{3.18}$$

We kunnen kunnen dus zeggen $\overline{x} \perp z - \overline{x}$ en[14]

$$\|z\|^2 = \|(z - \overline{x}) + \overline{x}\|^2 = \|z - \overline{x}\|^2 + \|\overline{x}\|^2 \, . \tag{3.19}$$

[14]Dat is de stelling van Pythagoras in de rechthoekige driehoek met hoekpunten 0, $\overline{x}$ en z.

Deze formule impliceert dat $\|z\|^2 - \|\overline{x}\|^2 \geq 0$, dus dat $\|\overline{x}\|^2 \leq \|z\|^2$. Dus, wegens (3.18),

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle z, e_{\lambda_i}\rangle|^2 \leq \|z\|^2 \; . \tag{3.20}$$

Deze ongelijkheid geldt voor elk eindig stelsel indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dan zijn er, bij gegeven z, maar eindig veel indices λ met $|\langle z, e_\lambda\rangle| \geq 1$. Algemener zijn er slechts eindig veel indices λ met $|\langle z, e_\lambda\rangle| \geq 1/n$, voor ieder $n \in \mathbb{N}$. Tezamen zijn er dan, bij gegeven z, hoogstens aftelbaar oneindig veel indices met $\langle z, e_\lambda\rangle \neq 0$. Daarmee is de bewering (1) bewezen.

Het zojuist bewezen resultaat houdt in dat de uitdrukking $\sum_\lambda |\langle x, e_\lambda\rangle|^2$ in feite een afbrekende reeks, of een gewone oneindige reeks is. Voor elke eindige deelsom geldt de schatting (3.20). Dan geldt de schatting ook voor de gehele som. Dwz (2) geldt.

We beschouwen de reeks $\sum_\lambda \langle z, e_\lambda\rangle e_\lambda$. Deze reeks convergeert wegens (1) en (2) en Stelling 3.7.25, zeg naar x_0. Dit element x_0 is dan de limiet van een rij elementen $\overline{x}$ van de vorm (3.18) en behoort dus tot $\overline{L(M)}$. Daarbij geldt

$$\|z - \overline{x}\|^2 = \left\| z - \sum_{i=1}^{k} \langle z, e_{\lambda_i}\rangle e_{\lambda_i} \right\|^2 = \|z\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle z, e_{\lambda_i}\rangle|^2$$

Door de limietovergang volgt dat

$$\|z - x_0\|^2 = \|z\|^2 - \sum_{\lambda} |\langle z, e_\lambda\rangle|^2 \; . \tag{3.21}$$

Zij anderzijds x een willekeurig punt van $L(M)$. Dan is x van de vorm $\alpha_1 e_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_k e_{\lambda_k}$, met zekere indices λ_i en zekere coëfficienten α_i. Uit het eerste deel van het bewijs volgt nu, als $\overline{x}$ het bijbehorende punt $\sum_{i=1}^{k} \langle z, e_{\lambda_i}\rangle e_{\lambda_i}$ is, dat

$$\|z - x\|^2 \geq \|z - \overline{x}\|^2 = \|z\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle z, e_{\lambda_i}\rangle|^2 \; .$$

Dan is zeker

$$\|z - x\|^2 \geq \|z\|^2 - \sum_{\lambda} |\langle z, e_\lambda\rangle|^2 \; .$$

Deze schatting blijft gelden als we voor x een willekeurig punt van $\overline{L(M)}$ nemen. Omdat (3.21) geldt, zijn daarmee de beweringen (3) en (4) aangetoond. □

Is, met de notatie van Stelling 3.7.26, $L(M)$ dicht in H, dan is steeds $d = 0$ en geldt steeds het gelijkteken in (2). En omgekeerd. We noemen nu het stelsel $M = (e_\lambda)$ *maximaal* in H als M niet uit te breiden is met een vector e', en *volledig* als $L(M)$ dicht is in H. Er geldt

Stelling 3.7.28. Zij $M = (e_\lambda)$ een orthonormaal stelsel in H. Dan zijn devolgende beweringen equivalent:
(1) M is maximaal in H;
(2) M is volledig in H;
(3) voor elk element $z \in H$ geldt de *betrekking van Parseval* : $\|z\|^2 = \sum_\lambda |\langle z, e_\lambda\rangle|^2$;
(4) voor elk punt $z \in H$ is $z = \sum_\lambda \langle z, e_\lambda\rangle e_\lambda$.

Bewijs: Volgens het voorafgaande drukken de beweringen (2), (3) en (4) alle uit dat $\overline{L(M)} = H$. Dus zijn deze beweringen equivalent.

Is verder het stelsel (e_λ) uit te breiden met een vector e' tot een groter orthonormaal stelsel, dan geldt de betrekking van Parseval niet voor $z = e'$ en dus is $\overline{L(M)} \neq H$. Is omgekeerd $\overline{L(M)} \neq H$, en z een element met $z \notin \overline{L(M)}$, dan is het stelsel (e_λ) uit te breiden met $e' = (z-x_0)/\|z-x_0\|$, waarin x_0 bepaald is als in het bewijs van Stelling 3.7.26. Dus zijn de beweringen (2), (3) en (4) ook equivalent met bewering (1). □

Gevolg 3.7.29. De stelling van Pythagoras in een oneindig-dimensionale ruimte. Zij (e_λ) een volledig orthonormaal stelsel in H. Dan convergeren de reeksen $\sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda$, waarbij $\alpha_\lambda \neq 0$ hoogstens aftelbaar oneindig vaak, en $\sum_\lambda |\alpha_\lambda|^2 < \infty$, in H en leveren deze reeksen precies alle elementen van H. Daarbij is $\|\sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda\|^2 = \| \sum_\lambda |\alpha_\lambda|^2$.

Bewijs: Een reeks van de genoemde vorm convergeert in H, wegens Stelling 3.7.25. Omgekeerd kan elk element van H als zo'n reeks geschreven worden, wegens Stelling 3.7.26 nrs (1) en (2), en Stelling 3.7.28 bewering (4). De laatste relatie is de betrekking van Parseval, met $z = \sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda$ en $\langle z, e_\lambda\rangle = \alpha_\lambda$ (vgl. (4)) □

We merken op dat het begrip volledig orthonormaal stelsel in een Hilbertruimte niet gezien kan worden als een ver-bijzondering van het algebraïsche begrip basis in een lineaire ruimte. We releveren de volgende feiten. [15] [16]

(A) Is (x_λ) een basis in een lineaire ruimte R, dan geldt:
(1) de elementen x_λ zijn lineair onafhankelijk in de zin dat een eindige lineaire combinatie $\alpha_1 x_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_k x_{\lambda_k} = 0$ alleen waar is als $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.
(2) elk element van R kan geschreven worden als een eindige lineaire combinatie $\alpha_1 x_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_k x_{\lambda_k}$. De coëfficienten α_i zijn eenduidig bepaald vanwege (1).
(B) Is (e_λ) een volledig orthonormaal stelsel in een Hilbertruimte, dan geldt:
($1'$) de elementen (e_λ) zijn lineair onafhankelijk in de zin dat een reeks $\sum \alpha_\lambda e_\lambda$ –indien convergent– som 0 heeft, alleen als alle $\alpha_\lambda = 0$ zijn.
($2'$) elk element van H kan geschreven worden als een convergente reeks $\sum \alpha_\lambda e_\lambda$ (de coëfficienten in deze reeks zijn eenduidig bepaald wegens ($1'$). Ingeval van oneindig-dimensionale H, is H méér dan het lineair omhulsel de e_λ.

Als generalisatie van de betrekking van Parseval hebben we nog

Stelling 3.7.30. Zij $M = (e_\lambda)$ een volledig orthonormaal stelsel in H. Dan is voor elk tweetal elementen $z, y \in H$,

$$\langle z, y\rangle = \sum_\lambda \langle z, e_\lambda\rangle \cdot \overline{\langle y, e_\lambda\rangle}\ . \tag{3.22}$$

Bewijs: We beschouwen de indices λ waarvoor $\langle z, e_\lambda\rangle \neq 0$ of $\langle y, e_\lambda\rangle \neq 0$. Dat zijn er hoogstens aftelbaar oneindig veel. Voor elk eindig deelstelsel λ-s geldt:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{\lambda_i}, \sum_{i=1}^n \beta_i e_{\lambda_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}\ ,$$

nemen we speciaal $\alpha_i = \langle z, e_{\lambda_i}\rangle$ en $\beta_i = \langle y, e_{\lambda_i}\rangle$, dan krijgen we na een limietovergang de betrekking (3.22).122 □

[15] Het lineair omhulsel kent alleen eindige sommen.
[16] Als H ∞-dimensionaal, dan is (e_λ) geen *basis* in algemene zin.

3.7.4 Isometie, Separabiliteit

We beschouwen afbeeldingen van een Hilbertruimte H_1 in Hilbertruimte H_2. Norm en product van deze ruimten geven we aan met $\|\cdot\|_1$ en $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, respectievelijk $\|\cdot\|_2$ en $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Aan een afbeelding, zeg T van H_1 in H_2 kunnen we verschillende eisen opleggen. Bijv.
(a) T is een *homomorfisme*[17] van H_1 als Abelse groep in H_2 als Abelse groep;
(b) T is *homogeen*, dwz $\forall_{\alpha\in\mathbb{C},x\in H_1}\ \ T(\alpha x)=\alpha\, T(x)$.
De eisen (a) en (b) houden samen in dat T een *lineaire afbeelding* is, dwz:

$$\forall_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C};x_1,x_2\in H_1} \qquad T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1T(x_1)+\alpha_2T(x_2)\ .$$

(c) T laat de norm invariant: $\|Tx\|_2=\|x\|_1$.

We geven nu devolgende

Definitie 3.7.31 (isometrie). Een *isometrie* tussen twee Hilbertruimten H_1 en H_2 is een lineaire afbeelding U van H_1 **op** H_2 met de eigenschap dat

$$\|Ux\|_2=\|x\|_1 \qquad \forall_{x\in H_1}\ .$$

Is $Ux=0$, dan is ook $x=0$. Dus U heeft kern $\{0\}$ en is dus een éénéénduidige afbeelding.

Op soortgelijke wijze definieert men een isometrie tussen twee Banachruimten, of algemener tussen twee genormeerde lineaire ruimten.

Stelling 3.7.32. Een isometrie tussen H_1 en H_2 laat ook het inproduct invariant, ofwel $\langle Ux,Uy\rangle_2=\langle x,y\rangle_1$.
BEWIJS: Neem twee willekeurige elementen $x,y\in H_1$ en zij $\lambda\in\mathbb{C}$, dan geldt

$$\begin{aligned}\|U(x+\lambda y)\|_2^2 &= \langle U(x+\lambda y),U(x+\lambda y)\rangle_2\\ &= \|Ux\|_2^2+|\lambda|^2\cdot\|Uy\|_2^2+\overline{\lambda}\langle Ux,Uy\rangle_2+\lambda\langle Uy,Ux\rangle_2\\ &= \|x\|_1^2+|\lambda|^2\cdot\|y\|_1^2+\overline{\lambda}\langle Ux,Uy\rangle_2+\lambda\langle Uy,Ux\rangle_2\end{aligned}$$

en ook

$$\|x+\lambda y\|_1^2 \quad=\quad \|x\|_1^2+|\lambda|^2\cdot\|y\|_1^2+\overline{\lambda}\langle x,y\rangle_1+\lambda\langle y,x\rangle_1\ .$$

Omdat $\|U(x+\lambda y)\|_2=\|x+\lambda y\|_1$ hebben we dus

$$\overline{\lambda}\langle Ux,Uy\rangle_2+\lambda\langle Uy,Ux\rangle_2=\overline{\lambda}\langle x,y\rangle_1+\lambda\langle y,x\rangle_1\ .$$

Passen we dit toe met $\lambda=1$ en met $\lambda=i$, dan vinden we door lineaire combinatie dat $\langle Ux,Uy\rangle_2=\langle x,y\rangle_1$. □

Voorbeelden van isometrieën zijn we in het verleden al tegengekomen.

Voorbeeld 3.7.33. De afbeelding $x+c_0\to\xi$, waarbij $x=(x_1,x_2,\dots,)$ een convergente getallenrij is en $\xi=\lim_{k\to\infty}x_k$ is een isometrie van de quotiëntruimte c/c_0 op $\mathbb{C}$. Zie voorbeeld 3.5.10.

[17] In het algemeen verstaat men onder een *homomorfisme* of *homomorfe afbeelding* een afbeelding van een verzameling met structuur in een andere verzameling met structuur die compatibel is met de structuren, dus de structuur van het domein overvoert in de structuur van het codomein. Als f een homomorfisme is van V met structuur S in W met structuur T geldt $\forall_{x,y\in V}\ f(S(x,y))=T(f(x),f(y))$.

Voorbeeld 3.7.34. De afbeelding $y \to y + G$, waarbij G een gesloten lineaire deelruimte van een gegeven Hilbertruimte H is en $y \in G^{\perp}$, is een isometrie van $G^{\perp}$ op H/G. Zie het einde van Sectie 3.7.2.

Alvorens verdere voorbeelden van isometrieën te geven brengen we de volgende definitie in herinnering.

Definitie 3.7.35. Een metrische ruimte heet *separabel* als R een aftelbare verzameling punten bevat die overal dicht ligt in R.

Stelling 3.7.36. Een lineaire deelruimte van een separabele Hilbert- of Banachruimte is weer separabel.
BEWIJS: Bekend is dat een metrische ruimte separabel is desda er een aftelbare basis bestaat voor de open verzamelingen in R. Als verder een aftelbare basis bestaat voor R, dan ook voor elke deelruimte van R. Uit deze twee feiten volgt de stelling. □

Voorbeeld 3.7.37. De ruimte $\mathbb{C}^k$, met inproduct $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i\overline{y_i}$, is separabel.

Voorbeeld 3.7.38. De Hilbertruimte ℓ^2 is ook separabel. Om dit in te zien beschouwen we de verzameling A bestaande uit rijen $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$, waarvan alle coördinaten rationaal zijn en ten hoogste eindig veel $\neq 0$ zijn. De rijen $(x_1, x_2, \ldots)$ in A, waarbij $x_k = 0$ voor $k \geq 2$ vormen kennelijk een aftelbare verzameling. Evenzo die waarbij $x_k = 0$ voor $k \geq 3$, enz.. Dan is dus ook A aftelbaar.

Verder ligt de verzameling van "afbrekende" rijen dicht in ℓ^2 (zie Stelling 3.5.6) en Opmerking 3.7.13. Elke afbrekende rij kan benaderd worden door elementen van A. Dus ligt A dicht in ℓ^2.

Van abstract standpunt zijn dit de enige voorbeelden van separabele Hilbertruimten. Er geldt namelijk:

Stelling 3.7.39. Zij H een separabele Hilbertruimte. Dan is H isometrisch met een der ruimten $\mathbb{C}^k$, met het hierboven gegeven inproduct, of met ℓ^2,
BEWIJS: Zij M een aftelbare verzameling die dicht ligt in H. Door orthonormaliseren krijgen we een afbrekende of oneindige rij $(e_1, e_2, \ldots)$ waarvan het lineair omhulsel dicht ligt in H. Breekt de rij af bij e_k, dan is H isometrisch met $\mathbb{C}^k$. (Beeld $e_i$af op de i-de eenheidsvector in $\mathbb{C}^k$, voor $i = 1, \ldots, k$.)

Is de rij oneindig, dan bestaat H wegens vroegere stellingen precies uit de elementen van de vorm $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ met $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$. Tevens is

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}$$

(zie Stelling 3.7.30). Hieruit volgt dat H isometrisch is met ℓ^2. □

Voorbeeld 3.7.40. We laten zien dat de ruimte ℓ^∞ een voorbeeld is van een niet-separabele Banachruimte. Zij A een willekeurige, eindige of oneindige verzameling van natuurlijke getallen en laat bij A een element $x^{(A)}$ in ℓ^∞ gedefinieerd zijn als volgt:

$$x_k^{(A)} = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad k \in A \\ 0 & \text{als} \quad k \notin A \end{cases}$$

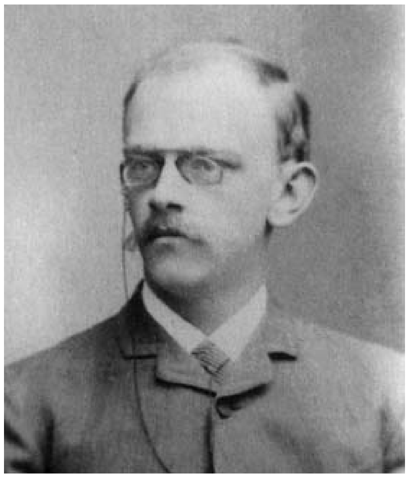
Het aantal van deze verzamelingen A is $2^{\aleph_0}$, dus overaftelbaar.[18] Voor twee verschillende verzamelingen A en A' is verder $\|x^{(A)} - x^{(A')}\| = 1$. Er volgt dat ℓ^∞ niet separabel is.

[18] $\aleph_0$ is de machtigheid van de aftelbaar oneindige verzameling.

3.8 ** David Hilbert **

David Hilbert (1862–1943) bezocht het gymnasium in zijn geboortestad Königsberg. Na zijn eindexamen ging hij ook naar de Universiteit van Königsberg. Hij studeerde daar verder onder professor Lindemann en hij behaalde er zijn doctoraat in 1885 met een proefschrift "Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen". Een van zijn vrienden was Minkowski die ook in Königsberg voor zijn proefschrift werkte en ze hadden op het gebied van de wiskunde een grote invloed op elkaar.

In 1884 werd Hurwitz benoemd aan de Universiteit van Königsberg en hij werd snel bevriend met Hilbert, een vriendschap die nog een belangrijke factor werd in Hilbert's wiskundige ontwikkeling. Van 1886 tot 1895 werkte Hilbert daar bij de Universiteit, eerst tot 1892 als Privatdozent en daarna één jaar als bijzonder hoogleraar tot hij in 1893 tot gewoon hoogleraar werd benoemd.



Figuur 3.1: Hilbert 1885

In 1892 verhuisde Schwarz van Göttingen naar Berlijn om Weierstrass' positie in te nemen en Klein wilde Hilbert de vacante plek in Göttingen aanbieden. Maar het lukte Klein niet zijn collega's te overtuigen en Heinrich Weber kreeg de positie. Klein was waarschijnlijk niet ongelukkig toen Weber drie jaar later verhuisde naar een hoogleraarsplek in Straatsburg, want bij die gelegenheid lukte het hem wel Hilbert aan te trekken. Zo werd Hilbert in 1895 benoemd op de leerstoel wiskunde aan de Universiteit van Göttingen, waar hij tot het eind van zijn carriere zou blijven.

Hilbert's eminente positie in de wiskundewereld na 1900 maakte dat veel andere instellingen hem graag verleid hadden om Göttingen te verlaten en in 1902 bood de Universiteit van Berlijn Hilbert Fuchs' leerstoel aan. Hilbert wees dat af, maar pas nadat hij het aanbod gebruikt had om met Göttingen te ondehandelen en hij ze overreed had een nieuwe leerstoel in te stellen om zijn vriend Minkowski naar Göttingen te halen.

Hilbert's eerste werk ging over invariantentheorie en in 1888 bewees hij zijn beroemde Basis Stelling. Twintig jaar eerder had Gordan de eindige basis stelling voor binaire vormen op een heel reken-intensieve manier bewezen. Pogingen om Gordan's werk uit te breiden voor stelsels met meer dan twee variabelen mislukten omdat de moeilijkheden bij het berekenen te groot waren. Hilbert probeerde eerst Gordan's aanpak te volgen, maar al snel realiseerde hij zich dat een nieuwe aanpak noodzakelijk was. Hij ontdekte een geheel nieuwe benadering die de eindige basis stelling bewees voor een willekeurig aantal variabelen, maar op een volkomen abstracte manier. En hoewel hij het bestaan van zo'n eidige basis kon aantonen, kon hij met zijn methode zo'n basis niet construeren.

Hilbert stuurde het artikel waarin hij de eindige basis stelling bewees naar de Mathematische Annalen. Maar Gordan, die voor de Mathematische Annalen de expert op het gebied van de invarianten theorie was, kon Hilbert's revolutionaire aanpak moeilijk waarderen. Hij schreef een referee-rapport over het artikel en zond zijn commentaar naar Klein:

Het probleem ligt hem niet in de vorm … maar het ligt veel dieper. Hilbert heeft het voldoende geacht zijn gedachten te presenteren door formele regels te volgen. Hij denkt dat het voldoende is dat niemand zijn bewijs kan weerleggen .. hij is er tevreden mee te denken dat het belang en de correctheid van zijn stellingen voldoende zijn. … voor een uitgebreid werkstuk voor de Annalen is dit onvoldoende.

Maar Hilbert had via zijn vriend Hurwitz over Gordan's brief aan Klein gehoord en hij schreef zelf aan Klein in krachtige bewoordingen: *… Ik ben niet bereid ook maar iets te veranderen of te verwijderen, en met betrekking tot dit artikel zeg ik in alle bescheidenheid dat dit mijn laatste woord is zo lang geen duidelijke en onweerlegbare bedenkingen tegen mijn redenering worden aangedragen.*

Toen Klein deze twee brieven van Hilbert en Gordan ontving was Hilbert een assistent docent en Gorden een over de hele wereld erkend expert op het gebied van de invarianten-theorie, en ook een goede vriend van Klein. Klein, echter, herkende het belang van Hilbert's werk en verzekerde hem dat het zonder enige wijziging in de Annalen zou verschijnen. En zo gebeurde het.

Figuur 3.2: Hilbert 1900

In een later artikel breidde Hilbert zijn methode uit en zond het weer in naar de Mathematische Annalen en, nadat hij het manuscript gelezen had, schreef Klein aan Hilbert: *Ik twijfel er niet aan dat dit het belangrijkste werk op het gebied van de algemene algebra is dat de Annalen ooit heeft gepubliceerd.*

In 1893, toen hij nog in Königsberg was, begon Hilbert een werk *Zahlbericht* over algebraïsche getaltheorie. De Duitse Wiskundige Vereniging had om zo'n belangrijke rapport verzocht, drie jaar nadat de Vereniging was opgericht in 1890. Het *Zahlbericht* (1897) is een brilliante synthese van het werk van Kummer, Kronecker and Dedekind maar bevat bovendien een schat aan ideeën van Hilbert zelf. De ideeën van het hedendaagse onderwerp 'Klassieke veldentheorie' kun je allen in dit werk vinden. In [18] beschrijft Rowe dit werk als

… niet echt een Bericht in de klassieke zin van het woord, maar eerder een stuk oorspronkelijk onderzoek dat onthult dat Hilbert niet alleen een specialist was, hoe begaafd ook. … hij geeft niet alleen een samenvatting van resultaten van eerder onderzoek … maar bracht ook nieuwe concepten in omloop die nog vele jaren later de loop van het onderzoek in de algebraïsche getaltheorie vorm zouden geven.

Ná Euclides had Hilbert's werk op het gebied van de meetkunde de grootste invloed. Een systematische studie van de axioma's uit de Euclidische meetkunde deed Hilbert 21 van die axioma's voorstellen en hij analyseerde het belang ervan. Hij publiceerde in 1899 de *Grundlagen der Geometrie*, waarbij hij de meetkunde op een formele axiomatische grondslag baseerde. Nieuwe uitgaven van het boek bleven verschijnen en het boek had grote invloed in het bevorderen van de axiomatische methode in de wiskunde, wat een van de belangrijkste kenmerken is geweest in de vroege 20ste eeuw.

Hilbert's befaamde 23 Parijse problemen daagden de wiskundigen uit om fundamentele vraagstukken op te lossen. Hilbert's bekende toespraak *Wiskundige Problemen* werd uitgesproken tijdens het Tweede Internationaal Wiskundig Congress (8 augustus 1900) in Parijs. Het was een toespraak vol optimisme over de wiskunde in de komende eeuw en hij voelde dat open problemen een teken van vitaliteit in een vakgebied zijn:

Het grote belang van bepaalde problemen voor de vooruitgang van de wiskundige wetenschap in het algemeen … valt niet te ontkennen … zo lang een tak van kennis een overmaat van zulke problemen naar voren brengt behoudt het zijn vitaliteit … ieder wiskundige deelt … de overtuiging dat ieder wiskundig probleem noodzakelijkerwijs een juiste oplossing nodig heeft … we horen binnen onszelf de voortdurende schreeuw: Daar is het probleem, zoek de oplossing. Je vindt het door zuiver nadenken…

Figuur 3.3: Hilbert ca 1930

Hilbert's problemen bevatten de continuum hypothese, de ordening van de reële getallen, het vermoeden van Goldbach, het transcendent zijn van machten van algebraïsche getallen, de Riemann hypothese, uitbreiding van het Dirichlet principe en nog veel meer. Veel van die problemen werden in de daarop volgende eeuw opgelost en iedere keer dat dat gebeurde was het een gebeurtenis van betekenis.

Tegenwoordig wordt Hilbert's naam het meest herinnerd door het begrip 'Hilbert ruimte'. In [2] legt Irving Kaplansky uit welk werk van Hilbert tot dit concept aanleiding gaf.

Hilbert's werk op het gebied van integraal vergelijkingen uit 1909 leidde direct tot het 20-ste eeuwse onderzoek op het gebied van de functionaalanalyse (de tak van wiskunde waarin functies als verschijnsel worden bestudeerd). Dit werk legde ook de basis voor zijn werk over de oneindig-dimensionale ruimte, die later Hilbertruimte genoemd werd, een begrip dat van nut is in de wiskundige analyse en in quantummechanica. Door gebruik te maken van zijn resultaten over integraalvergelijkingen, leverde Hilbert bijdragen aan de ontwikkeling van de mathematische fysica door zijn belangrijke rapporten over de kinetische gastheorie en de stralingstheorie.

Sommigen claimden dat Hilbert in 1915 –vóór Einstein– de juiste veld-vergelijkingen voor de algemene relativitetstheorie ontdekte, maar nooit de prioriteit opeiste. Het artikel [11] laat echter zien dat dit onjuist is. In dat artikel tonen de schrijvers overduidelijk aan dat Hilbert zijn artikel op 20 November 1915 indiende, vijf dagen voordat Einstein zijn artikel dat de juiste veld-vergelijkingen bevatte inzond. Einstein's artikel verscheen op 2 December 1915 maar de drukproeven van Hilbert's artikel (gedateerd 6 December 1915) bevatten de veld-vergelijkingen niet. Zoals de auteurs van [11] schrijven:

In de gedrukte versie van zijn artikel voegde Hilbert een referentie aan Einstein's beslissende artikel en een erkenning van diens prioriteit: "De differentiaalvergelijkingen van de zwaartekracht die overblijven zijn, naar ik het zie, in overeenstemming met de prachtige algemene relativiteitstheorie die door Einstein in zijn laatste publicaties is vastgelegd." Als Hilbert alleen de datum had veranderd zodat men kon lezen "ingestuurd op 20 november 1915, en gereviseerd op …. (een *datum ná 2 december 1915, de datum van Einstein's artikel)" dan zou er later geen probleem over die prioriteit ontstaan zijn.*

In 1934 en 1939 verschenen twee delen van de *Grundlagen der Mathematik* die bedoeld waren te leiden tot een "bewijs-theorie", een direkte controle voor de consistentie van de wiskunde. Gödel's artikel uit 1931 liet zien dat dit doel onhaalbaar was.

Hilbert leverde bijdragen aan veel takken van de wiskunde, zoals invarianten, algebraische getaltheorie, functionaal-analyse, integraalvergelijkingen, mathematische fysica en de variatierekening. Hilbert's mathematische vermogens worden aardig opgesomd door Otto Blumenthal, zijn eerste student:

Wanneer je wiskundig talent analyseert moet je onderscheid maken tussen enerzijds het vermogen om nieuwe concepten te creëren die nieuwe soorten gedachten-structuren generen, en anderzijds de gave om diepere verbindingen te vinden en een onderliggende overeenkomsten. In Hilbert's geval ligt zijn grootheid in een immens machtig inzicht dat doordringt in de diepten van een probleem. Al zijn werk bevat voorbeelden van uitgebreide gebieden waarin hij de enige was om een relatie te zien en een verbinding met het probleem waarmee hij bezig was. Vandaaruit werd een uiteindelijk de synthese –zijn kunstwerk– gecreëerd. Voor zover het het creëren van nieuwe ideeën betreft, zou ik Minkowski hoger plaatsen, en bij de klassieken Gauss, Galois en Riemann. Maar als het aankomt op doordringend inzicht, zijn er maar weinig van de allergrootsten die zich de gelijke van Hilbert kunnen noemen.

Onder Hilbert's studenten waren Hermann Weyl, de beroemde schaakkampioen Lasker, and Zermelo. Hilbert ontving vele eerbewijzen. In 1930 ging Hilbert met pensioen en de stad Königsberg maakte hem ereburger. Hij hield een toespraak die hij besloot met zes beroemde woorden die zijn enthousiasme voor wiskunde duidelijk maken en laten zien hoe hij zijn leven wijdde aan het oplossen van wiskundeproblemen:

Wir müssen wissen, wir werden wissen - We moeten weten, we zullen weten.

3.9 Lineaire operatoren

3.9.1 Algemene eigenschappen

Laten B_1 en B_2 twee Banachruimten zijn. We beschouwen functies T die aan elk punt van een zekere deelverzameling D van B_1 een punt van B_2 toevoegen. We spreken doorgaans van *operatoren,*, *transformaties* of *afbeeldingen* van B_1 in B_2, ofschoon ze slechts op een deelverzameling van B_1 gedefinieerd zijn. We noteren dit als $T : B_1 \supset D \to B_2$. In het speciale geval $B_2 = \mathbb{C}$ dan heet T *functionaal*.

Definitie 3.9.1 (lineaire afbeelding). Een operator T van B_1 in B_2, gedefinieerd op $D \subset B_1$, heet *lineair* als geldt: (1) D is een lineaire deelruimte van B_1, en
(2)

$$\forall_{x_1,x_2\in D,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}} \quad T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)\ .$$

Definitie 3.9.2 (nulruimte, nulafbeelding). De *nulruimte*, $\mathcal{N}(T)$, van een afbeelding $T : D \subset B_1 \to B_2$ is de deelverzameling van D die op $0 \in B_2$ wordt afgebeeld:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \mid x \in D\ \wedge\ T(x) = 0\}\ .$$

De afbeelding T heet de *nulafbeelding* als $\mathcal{N}(T) = D$.

Het is duidelijk onder welke voorwaarden T *continu* zal heten:

Definitie 3.9.3 (continue afbeelding). T is *continu* in $x_0 \in D$ als

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} \quad \|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_2 < \varepsilon\ ;$$

T heet continu op D als T continu is in elk punt van D.

Opmerking 3.9.4. Een *lineaire* afbeelding die continu is in een enkel punt is continu op zijn gehele definitiegebied.

We geven verder de volgende

Definitie 3.9.5 (begrensde afbeelding). Een afbeelding $T : B_1 \supset D \to B_2$ heet *begrensd* op D als er een constante $C > 0$ bestaat, zodat

$$\forall_{x\in D} \quad \|Tx\|_2 \le C\|x\|_1\ . \tag{3.23}$$

Dus voor een lineaire afbeelding T is begrensdheid van T: begrensdheid op de eenheidsbol E, althans op $E \cap D$.

Bestaat er een getal C zodat (3.23) geldt, dan bestaat er ook een kleinste getal $C \ge 0$ met deze eigenschap. Immers als (3.23) geldt, dan is zeker $\|Tx\|_2 \le C \ \ \forall x \in E \cap D$. Als omgekeerd deze bewering geldt, dan geldt ook de algemenere ongelijkheid (3.23), met dezelfde constante C, wegens lineariteit van T. Dit laatste getal is namelijk niets anders dan het supremum van $\|Tx\|_2$ op $E \cap D$. We noemen het kleinste getal $C \ge 0$ waarvoor (3.23) geldt de *norm* van T.

Definitie 3.9.6 (norm van een begrensde lineaire afbeelding). De *norm*, $\|T\|$, van een lineaire afbeelding $T : D \subset B_1 \to B_2$ is gedefinieerd door

$$\|T\| = \sup_{x\in D, x\neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}\ .$$

Voorbeeld 3.9.7. Zij $B_1 = B_2 = C_{a,b}$ en T de differentiatie in $C_{a,b}$, dan is T een lineaire operator, gedefinieerd op de lineaire deelruimte D der continu differentieerbare functies. Deze operator is niet begrensd, want voor elk n is e^{int} een functie uit D en $T(e^{int}) = in.e^{int}$, zodat $\|T(e^{int})\| = n\|e^{int}\|$. Het getal n kan willekeurig groot gekozen worden.

Opmerking 3.9.8. de deelruimte D is dicht in $C_{a,b}$ (daarvan geven we hier geen bewijs). De onbegrensdheid van T hangt samen met het feit dat we niet alle functies uit $C_{a,b}$ kunnen differentiëren.

Definitie 3.9.9 (isomorfie of isomorfisme). Een *isomorfie* tussen twee Banachruimten B_1, B_2 (of algemener: twee genormeerde lineaire ruimten[19]) is een éénéénduidige lineaire afbeelding T van de gehele B_1 op de gehele B_2, die in beide richtingen continu is.

Dat laatste wil zeggen: er bestaan twee constanten $C_1, C_2 > 0$, zodat geldt

$$C_1\|x\|_1 \leq \|Tx\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \ . \tag{3.24}$$

deze ongelijkheid houdt vanzelf al in dat T éénéénduidig is, want $Tx = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Dus: een isomorfie tussen twee Banachruimten B_1 en B_2 is een lineaire afbeelding van B_1 **op** B_2, waarbij een ongelijkheid (3.24) geldt.

Er is verband met het begrip equivalentie van normen. Twee normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ op een lineaire ruimte R zijn immers equivalent desda de identieke afbeelding van R met de norm $\|\cdot\|_1$ op R met de norm $\|\cdot\|_2$ een isomorfie is. Een isometrie is zeker een isomorfie.

Voor lineaire afbeeldingen zij de eigenschappen continuiteit en begrensdheid equivalent. Dit blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 3.9.10 (continuiteit en begrensdheid). Een lineaire afbeelding T van B_1 in B_2 is continu op zijn definitiegebied D desda hij begrensd is op D.
BEWIJS: Als T de nulafbeelding dan is de stelling triviaal. Dus we nemen aan $T \neq 0$.
(1) We nemen aan dat T begrensd is op D Voor een $x_0 \in D$ geldt dan

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \| \ \|x - x_0\|$$

zodat voor iedere $\varepsilon > 0$ er een $\delta = \varepsilon/\|T\|$ bestaat zodat $\|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \delta$. Omdat $x_0 \in D$ willekeurig gekozen was is T continu op D.
(2) Neem aan dat T continu is, dan

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} \quad \|x - x_0\|_1 < \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx - Tx_0\|_2 < \varepsilon \ .$$

Kies een willekeurige $y \in D$, $y \neq 0$, en neem dan $x = x_0 + (\delta/2)\, y/\|y\|$ zodat $\|x - x_0\| = \delta/2 < \delta$, dan geldt

$$\varepsilon > \|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \|T\left(\frac{\delta y}{\|y\|}\right)\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \, ,$$

zodat $\|Ty\| < (\varepsilon/\delta)\, \|y\|$. Dit laat zien dat T begrensd is. □

[19] In het algemeen is een *homomorfisme* een afbeelding tussen twee verzamelingen die ook een structuur die op die verzamelingen bestaat in elkaar kan overbrengen. Een homomorfisme heet een *isomorfisme* als het ook een bijectie is. Een homomorfisme van een ruimte in zichzelf heet een *endomorfisme*; een endomorfisme dat ook een bijectie is heet *automorfisme*.

Stelling 3.9.10 houdt in dat we, voor lineaire operatoren, de woorden continu en begrensd door elkaar mogen gebruiken. We beschouwen speciaal het geval dat D dicht is in B_1 en T continu is. Zij $x \in B_1$ en (x_n) een rij in D met $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dan is

$$\|Tx_n - Tx_m\|_2 \leq C\|x_n - x_m\|_1 \qquad \forall_{n,m\in\mathbb{N}}$$

dus (Tx_n) is een fundamentaalrij in B_2, convergerend naar een element $y \in B_2$. Hierbij hangt y niet af van de keuze van de rij (x_n), want als (x'_n) een tweede rij in D is, met limiet x, en als (x^*_n) ontstaat door het mengen van (x_n) en (x'_n), dan convergeert (Tx^*_n) en is dus $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tx'_n$ We mogen daarom stellen $Tx = y$.

Door dit procédé wordt T uitgebreid tot een operator gedefinieerd op heel B_1. (Voor $x \in D$ stemt de nieuwe waarde Tx vereen met de oude waarde omdat T continu is.) We laten zien dat de uitgebreide operator weer *lineair* en *continu* is.

Stelling 3.9.11 (voortzetting van een begrensde lineaire operator). Zij $T : D \subset B_1 \to B_2$ lineair. Als D dicht ligt in B_1 en T continu op D, dan is T eenduidig uit te breiden tot een continue lineaire operator op B_1.

BEWIJS:
(1) door beschouwing van een rij $(\alpha x_n + \beta y_n)$ volgt dat $T(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha T(x_n) + \beta T(y_n)$. Hier $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ en (x_n),(y_n) rijen in D met limiet x respectievelijk y.
(2) Uit $\|Tx_n\|_2 \leq C\|x_n\|_1$, $(n = 1, 2, \ldots)$ volgt door limietovergang dat $\|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1$. Hierbij is (x_n) een rij in D met limiet x. We merken nog op dat de uitbreiding van T *uniek* is: de continuïteit van T op B_1 impliceert dat $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n$, wanneer (x_n) een rij in D is met limiet x. □

3.9.2 Lineaire functionalen

Zij B een Banachruimte. een lineaire operator u van B in $\mathbb{C}$ heet een *lineaire functionaal.* Een functionaal is dus een functie met als waarden complexe getallen[20].

De algemene stellingen over lineaire operatoren gelden uiteraard ook voor het speciale geval van lineaire functionalen. Dus als $u : B \supset D \to \mathbb{C}$ een lineaire functionaal is, dan geldt:

(1) u continu op $D \Leftrightarrow u$ begrensd op $D \Leftrightarrow \|u\|$ begrensd.
(2) u continu op D en D dicht in $B \Rightarrow u$ eenduidig uit te breiden tot een lineaire functionaal op B.

We willen nu een overzicht krijgen van *alle* begrensde lineaire functionalen op een gegeven Banachruimte. Eerst het geval van Hilbertruimten.

Is H een *Hilbertruimte* en $z \in H$ een willekeurig element, dan is het inproduct wat daarmee gevormd kan worden, $u(x) = \langle x, z\rangle$, een begrensde lineaire functionaal op H, met norm $\|z\|$, want u is lineair, $u(x)| \leq \|z\| \cdot \|x\|$, etc.. Omgekeerd geldt:

Stelling 3.9.12 (Stelling van Riesz). Zij u een begrensde lineaire functionaal op een Hilbertruimte H, dan bestaat er één en precies één element $z \in H$ zodat $u(x) = \langle x, z\rangle$.

BEWIJS: Zij G de nulruimte van u, dan is G een lineaire deelruimte van H, alsmede gesloten. Als $G = H$ dan is u de nulafbeelding en dan kunnen we eenvoudig nemen: $z = 0$. Als $G \neq H$ dan $G^\perp \neq \{0\}$. Dan nemen we in $G^\perp$ een element x_0 met $\|x_0\| = 1$. Neem een willekeurig element $x \in H$, dan bestaat een getal $\alpha \in \mathbb{C}$ met $u(x) = \alpha u(x_0) \in \mathbb{C}$ omdat $x_0 \neq 0$. Dan is $u(x - \alpha x_0) = 0$, dus $x - \alpha x_0 \in G$. Dus $x = \alpha x_0 + y$, $y \in G$. Inproduct nemen met x_0 levert:

$$\langle x, x_0\rangle = \alpha + \langle y, x_0\rangle = \alpha \ .$$

[20] functie = operator = transformatie = afbeelding.

Dus $u(x) = \alpha \cdot u(x_0) = \langle x, x_0\rangle \cdot u(x_0) = \langle x, z\rangle$ waarin $z = \overline{u(x_0)} \cdot x_0$.
Is $u(x) = \langle x, z_1\rangle$ en ook $u(x) = \langle x, z_2\rangle$ op H dan is $\langle x, z_1 - z_2\rangle = 0$ voor alle $x \in H$ en dus ook $\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = \|z_1 - z_2\| = 0$. Hieruit volgt $z_1 - z_2 = 0$. Daarmee is de stelling bewezen. Blijkbaar is $\|u\| = |u(x_0)|$. □

In het geval van *Banachruimten* is de situatie gecompliceerder. We geven eerst een voorbeeld.

Voorbeeld 3.9.13 (de ruimten ℓ^1 en ℓ^∞). Zij $B = \ell^1$ en u een willekeurige begrensde lineaire functionaal op ℓ^1. Stel $u_k = u(e_k)$, $(k \in \mathbb{N})$. Dan is (u_k) een begrensde rij getallen omdat de rij der normen $\|e_k\|$ begrensd is. Voor een willekeurig element $x \in \ell^1$ is wegens continuïteit van u

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u(x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \ .$$

Hierbij is gesteld $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, $(n \in \mathbb{N})$.

Zij omgekeerd (u_k) een begrensde rij getallen. Definieer u door

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \ .$$

De reeks convergeert voor alle $x \in \ell^1$, terwijl

$$|u(x)| \leq \sup_k |u_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sup_k |u_k| \cdot \|x\| \ .$$

Ook is $u(x)$ lineair in x. Dus u is een begrensde lineaire functionaal op ℓ^1.

De schatting voor $u(x)$ kan niet verscherpt worden: voor $x = e_k$ is $|u(x)| = |u_k| = |u_k| \cdot \|x\|$. Dus is $\|u\| = \sup_k |u_k|$.

Conclusie. De begrensde lineaire functionalen u op ℓ^1 corresponderen éénéénduidig met de begrensde rijen (u_k) via de toevoeging

$$u \to (u_k), \quad u_k = u(e_k), \quad \forall_{k\in\mathbb{N}} \ .$$

Daarbij is $\|u\| = sup_k |u_k|$. ■

In het algemeen kunnen we als volgt redeneren. Zij B een Banachruimte en B^* de collectie der begrensde lineaire functionalen en u op B. We hebben al $\|u\|$ gedefinieerd. We kunnen ook som en scalair veelvoud in B^* definiëren: met $u, u_1, u_2 \in B^*$

$$\begin{array}{rcll} (u_1 + u_2)(x) &=& u_1(x) + u_2(x) & \forall_{x\in B} \\ (\alpha u)(x) &=& \alpha \cdot u(x) & \forall_{x\in B} \ . \end{array} \tag{3.25}$$

De functionalen $(u_1 + u_2)$ en αu zijn weer begrensd en lineair, dus elementen van B^*. Er geldt

Stelling 3.9.14 (duale ruimte van een Banachruimte).
Met de gegeven definities (3.25) voor som, scalair veelvoud en norm is B^* weer een Banachruimte. Deze ruimte heet de *duale ruimte* van B.
Bewijs: Het bewijs verloopt als in het geval voor ℓ^1 of ℓ^2.
De volgende punten komen hierbij aan de orde.

(1) B* is een lineaire ruimte
(2) de functionaal $\|\cdot\|$ is een norm op B^*.
Bijv. $\|u_1 + u_2\| \le \|u_1\| + \|u_2\|$ omdat
$\|u_1 + u_2\| = \sup_{\|x\|=1} |(u_1 + u_2)(x)| \le \sup_{\|x\|=1}(|u_1(x)| + |u_2(x)|)$ etc..
(3) B^* is volledig in de norm $\|\cdot\|$, want zij (u_n) een fundamentaalrij in B^*, dan geldt:
1. de rij der normen $\|u_n\|$ is begrensd, zeg $\|u_n\| \le C$, $(n \in \mathbb{N})$
2. de rij (u_n) is puntsgewijs een fundamentaalrij, dwz voor elke $x \in B$ is een getalrij $(u_n(x))$ een fundamentaalrij. en daarmee convergent naar een getal $u(x)$.
3. de zo gevonden functionaal u is lineair en begrensd, met norm $\le C$ waarbij C de constante uit 1. is.
4. evenzo volgt uit $\forall_{n,m\ n_\varepsilon} \|u_n - u_m\| < \varepsilon$ dat $n > n_\varepsilon \Rightarrow \|u_n - u\| \le \varepsilon$.

Het bewijs volgt door deze punten eenvoudig na te gaan. □

Voorbeeld 3.9.15. Als we de Hilbertruimte als Banachruimte beschouwn: $B = H$ dan bestaat er de duale ruimte H^*. Volgens de stelling van Riesz bestaat er een 1-1-duidige afbeelding van H^* (een Banachruimte) op H, gegeven door

$$u \to z, \quad \text{waarbij} \quad u(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall_{x\in H} \ .$$

Deze afbeelding is anti-lineair, omdat $\langle x, z\rangle$ anti-lineair is in z: met αu correspondeert $\overline{\alpha} z$. Verder blijft de norm behouden. We zeggen wel dat H^* *anti-ïsometrisch* is met H. In het reële geval is H^* isometrisch met H.

Voorbeeld 3.9.16. $B = \ell^1$. In dit geval is B^* isometrisch met ℓ^∞. De isometrie wordt gegeven door $u \to (u_k)$, waarbij $u_k = u(e_k)$.

3.9.3 Geadjungeerde operatoren in Hilbertruimten

Van nu af beschouwen we alleen begrensde lineaire operatoren in Hilbertruimten. Zij H een gegeven Hilbertruimte en T een gegeven begrensde lineaire operator, gedefinieerd op H. Dan is $\langle Tx, y\rangle$, met y vast, een begrensde lineaire functionaal.
wegens de stelling van Riesz is dus $u(x) = \langle Tx, y\rangle$ van de vorm $\langle x, y^*\rangle$. We schrijven $y^* = T^*y$.

Definitie 3.9.17 (geadjungeerde operator). Zij T een begrensde lineaire operator op H, dan heet T^* de geadjungeerde operator. Deze operator wordt dus gedefinieerd door

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \ .$$

Stelling 3.9.18. T^* is weer lineair en begrensd en $\|T^*\| = \|T\|$.
Bewijs:
(1) $\forall_{x,y_1,y_2\in H;\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}}\ \langle x, T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\rangle = \langle Tx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \overline{\alpha}_1\langle Tx, y_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle Tx, y_2\rangle =$
$= \overline{\alpha}_1\langle x, T^*y_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle x, T^*y_2\rangle = \langle x, (\alpha_1 T^*y_1 + \alpha_2 T^*y_2)\rangle$.
Zodat $T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (\alpha_1 T^*y_1 + \alpha_2 T^*y_2)$.
(2) Vanwege (3.12) en de definitie van de norm van een operator

$$\|T^*\| = \sup_{y\in H} \frac{\|T^*y\|}{\|y\|} = \sup_{y\in H}\sup_{x\in H} \frac{\langle x, T^*y\rangle}{\|x\|} = \sup_{x\in H}\sup_{y\in H} \frac{\langle Tx, y\rangle}{\|x\|} = \sup_{x\in H} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\| \ .$$

□

We zien eenvoudig dat met T en S ook T^* en ST begrensde lineaire operatoren zijn, en verder zien we dat $T^{**} = T$, en $(TS)^* = S^*T^*$.

Het eindig-dimensionale geval.
In dit geval is $H = \mathbb{C}^k$ en $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^k x_i \overline{y}_i$ (bij geschikte basis-keuze). T^* voldoet aan $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Nu is T, en dus T^* weer te geven door een matrix (t.o.v. de speciale basis). Introduceer (t_{ij}) en (t^*_{ij}) zodat

$$Te_i = \sum_j t_{ij}e_j \qquad \text{en} \qquad T^*e_i = \sum_j t^*_{ij}e_j \ ,$$

dan is $t_{ij} = \langle Te_i, e_j\rangle$ en $t^*_{ij} = \langle T^*e_i, e_j\rangle = \langle e_i, Te_j\rangle = \overline{t_{ji}}, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, k$.
Dus in het eindig-dimensionale geval ontstaat de matrix behorende bij T^* uit die bij T door complex conjugeren en spiegelen. (In het reële geval door enkel spiegelen: de matrix is dan symmetrisch).

Definitie 3.9.19. Een begrensde lineaire operator T op H heet *Hermitisch* of *symmetrisch* als $T = T^*$, dus als

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, TY\rangle \qquad \forall x, y \in H \ .$$

Voor Hermitische operatoren gebruiken we voortaan de letter A (van adjungeren). Voor de bijbehorende matrix (a_{ij}), in het eindig-dimensionale geval, betekent de voorwaarde dat $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ voor alle i en j.

Stelling 3.9.20. Zij A een begrensde lineaire operator op H. Dan geldt: A is Hermitisch desda de kwadratische vorm $\langle Ax, x\rangle$ reëel is voor alle $x \in H$.
Bewijs: (1) Zij A Hermitisch, dan geldt voor alle $x \in H$ dat $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$. Dus is $\langle Ax, x\rangle$ reëel.
(2) Onderstel dat $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$ steeds reëel is. Neem twee willekeurige elementen $x, y \in H$. We trachten $\langle Ax, y\rangle$ te schrijven als een lineaire combinatie van Q-waarden. Eerst

$$\begin{aligned} Q(x+y) - Q(x-y) &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &= 2(\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle) \end{aligned}$$

vervangen we y door iy dan krijgen we

$$Q(x+iy) - Q(x-iy) = 2(\langle Ax, iy\rangle + \langle iAy, x\rangle) = 2i(\langle Ay, x\rangle - \langle Ax, y\rangle)$$

Dus

$$(Q(x+y) - Q(x-y)) + i(Q(x+iy) - Q(x-iy)) = 4\langle Ax, y\rangle \ .$$

Als we hiervan de complex geconjugeerde nemen en x en y verwisselen, verandert het linkerlid niet omdat $Q(-z) = Q(z)$ en $Q(iz) = \langle iAz, iz\rangle = \langle Az, z\rangle = Q(z)$. Derhalve

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle} = \langle x, Ay\rangle \ ,$$

waarmee bewezen is dat A Hermitisch is. $\square$

3.9.4 Projectoren in Hilbertruimten

Definitie 3.9.21. Een lineaire operator $P : B \to B$ op een Banachruimte B heet een *projectie* als $P^2 = P$. Een lineaire operator $P : H \to H$ op een Hilbertruimte H heet een *orthogonale projectie* als $P^2 = P$ en $P^* = P$. De projectie heet een *scheve projectie* als $P^2 = P$ en $P^* \neq P$. Als er geen verwarring mogelijk is laat men in het geval van een Hilbertruimte de aanduiding 'orthogonale' vaak weg.

Zij $G \subset H$ een gesloten lineaire deelruimte van een Hilbertruimte. Dan is $H = G \oplus G^\perp$, dwz elk element $z \in H$ is eenduidig te schrijven als $z = x + y$ met $x \in G$ en $y \in G^\perp$ (zie Sectie 3.7.2). De operator P_G gedefinieerd door $P_G z = x$ is een *projector*. Deze operator voegt dus aan een willekeurig element $z \in H$ de projectie van z op G toe. Deze operator $P_G : H \to G \subset H$ is lineair, en $\|P_G\| = 1$ (behalve als $G = \{0\}$ in welk geval $\|P_G\| = 0$).

Stelling 3.9.22 (karakterisering van een projectie). De projector $P_G : H \to G \subset H$ is een orthogonale projectie. Anderzijds is een projectie $P : H \to PH \subset H$ een projector op PH, het beeld van P in H.
BEWIJS:
(1.) Met G een gesloten lineaire deelruimte van $H = G \oplus G^\perp$, kan iedere $z \in H$ geschreven worden als $z = x + y$, met $x = P_G z \in G$ en $y = (z - P_G z) \in G^\perp$. Nu geldt duidelijk $P_G^2 z = P_G x = x = P_G z$, zodat $P_G^2 = P_G$.
Verder, voor willekeurige $z_1, z_2 \in H$, maken we de ontbinding $z_1 = x_1 + y_1$ en $z_2 = x_2 + y_2$ met $x_1, x_2 \in G$ en $y_1, y_2 \in G^\perp$, zodat $\langle y_1, x_2\rangle = 0$ en $\langle x_1, y_2\rangle = 0$.
Nu volgt $\forall_{z_1,z_2\in H}$ $\langle Pz_1, z_2\rangle = \langle x_1, x_2 + y_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1 + y1, x_2\rangle = \langle z_1, P_G z_2\rangle = \langle P_G^* z_1, z_2\rangle$ zodat $P_G = P_G^*$.
(2.) Zij nu P een begrensde lineaire operator, gedefinieerd op H, zodat $P^2 = P$ en $P^* = P$. Voor willekeurige $z_1, z_2 \in H$ is dan

$$\langle Pz_1, z_2 - Pz_2\rangle = \langle z_1, P(z_2 - Pz_2)\rangle - \langle y, Pz_2 - Pz_2\rangle = 0 \tag{3.26}$$

Dus in het bijzonder: $(Pz) \perp (z - Pz)$ voor alle $z \in H$. We beschouwen nu de operator $I - P$, waarbij I de *identiteit* is. Zij G de nulruimte van $I - P$. Dan geldt
a) Voor elke $z \in H$ is $Pz \in G$ wegens $(I - P)Pz = (P - P^2)z = 0$.
b) Elke $x \in G$ is van de vorm Pz omdat $(I - P)x = 0$ dus $x = Px$.
Dus G is de beeldruimte van H onder P, ofwel: $G = PH$. Voor een willekeurig punt $z \in H$ is nu $Pz \in G$, en $(z - Pz) \perp G$, wegens (3.26). Dus $z = Pz + (z - Pz)$ is een splitsing van de gewenste soort, dus P is een projectie op G.
Merk op dat G gesloten is, bijv. omdat G de nulruimte van de continue operator $I - P$ is. □

Ordening Hermitische operatoren.
We voeren nog een notatie in: zijn A en B twee Hermitische begrensde lineaire operatoren op H, dan zijn $\langle Az, z\rangle$ en $\langle Bz, z\rangle$ steeds reëel. We schrijven nu $A \leq B$ als geldt

$$\langle Az, z\rangle \leq \langle Bz, z\rangle \quad \forall z \in H\ . \tag{3.27}$$

In het geval van projectoren kan deze relatie eenvoudiger geschreven worden. Voor een willekeurige projector P is namelijk

$$\langle Pz, z\rangle = \langle P^2 z, z\rangle = \langle Pz, Pz\rangle = \|Pz\|^2\ .$$

Voor twee projectoren $P_!$ en P_2 is dus de relatie $P_1 \leq P_2$ equivalent met

$$\|P_1 z\| \leq \|P_2 z\| \quad \forall z \in H\ . \tag{3.28}$$

We leiden nu de volgende eenvoudige eigenschappen af.

Stelling 3.9.23. Is P projector, dan is $0 \leq P \leq I$. Hier is 0 de nul-operator en I de identiteit.
BEWIJS: Voor elke z zien we direct in dat $0 \leq \|Pz\| \leq \|z\|$. □

Stelling 3.9.24. Laten P_1, P_2 projectoren zijn op G_1, resp. G_2. Dan geldt:

$$P_1 P_2 = 0 \Leftrightarrow G_1 \perp G_2$$

(In de ring der begrensde lineaire operatoren op H komen blijkbaar nuldelers voor.)
BEWIJS:
(1) Zij $P_1 P_2 = 0$. Voor het inproduct van twee vectoren x_1, x_2 uit G_1, resp. G_2 hebben we dan

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle P_1 x_1, P_2 x_2 \rangle = \langle z_1, P_1 P_2 x_2 \rangle = 0 \ .$$

Dus $G_1 \perp G_2$.
(2) Zij $G_1 \perp G_2$. Dan $\forall_{z_1, z_2 \in H} \ \langle z_1, P_1 P_2 z_2 \rangle = \langle P_1 z1, P_2 z_2 \rangle = 0$. Dus $P_1 P_2 = 0$. □

Stelling 3.9.25. Laten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ projectoren zijn op $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Dan geldt

$$(P_i P_k = 0 \quad \text{voor} \quad i \neq k) \qquad \Leftrightarrow \qquad P_1 + P_2 + \cdots + P_n \quad \text{is een projector.}$$

BEWIJS:
(1) Zij $P_i P_k = 0$ voor $i \neq k$. Stel $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, dan is $P^2 = (P_1 + P_2 + \cdots + P_n)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_n^2 = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = P$ en $P^* = (P_1 + P_2 + \cdots + P_n)^* = P_1^* + P_2^* + \cdots + P_n^* = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = P$.
(2) Zij $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ een projector en laten i, k twee indices zijn met $i \neq k$. Voor willekeurige z is $\|Pz\|^2 = \langle Pz, z \rangle = \langle P_1 z + P_2 z + \cdots + P_n z, z \rangle = \|P_1 z\|^2 + \|P_2 z\|^2 + \cdots + \|P_n z\|^2$. Verder is $\|z\|^2 \geq \|Pz\|^2$. Dus $\|z\|^2 \geq \|P_1 z\|^2 + \|P_2 z\|^2 + \cdots + \|P_n z\|^2 \geq \|P_i z\|^2 + \|P_k z\|^2$. Vullen we hier voor z nu $P_k z$ in, dan krijgen we $\|P_k z\|^2 \geq \|P_i P_k z\|^2 + \|P_k P_k z\|^2 = \|P_i P_k z\|^2 + \|P_k z\|^2$. Hieruit volgt $\|P_i P_k z\| \leq 0$ zodat $\|P_i P_k z\| = 0$. Omdat z willekeurig is, is dus $P_i P_k = 0$. □

Stelling 3.9.26. Laten weer P_1, P_2 twee projectoren zij op G_1, resp. G_2. Dan geldt:

$$G_1 \supset G_2 \Leftrightarrow P_1 P_2 = P_2 \Leftrightarrow P_2 P_1 = P_2 \Leftrightarrow P_1 - P_2 \text{ is een projector } \Leftrightarrow P_1 \geq P_2 \ .$$

BEWIJS: We nummeren de beweringen (1) tem (5). We hebben:
(1)⇔(2). Immers als $G_1 \supset G_2$ dan is P_1 de identiteit op $G_2 = P_2 H$. Dus $P_1 P_2 = P_2$. En omgekeerd.
(2)⇒(3) Want zij $P_1 P_2 = P_2$, dan is $P_2 P_1 = P_2^* P_1^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* = P_2$.
(3)⇒(2) Evenzo.
(3)⇒(4) Want zij $P_2 P_1 = P_2$, dan is omdat ook (2) geldt $(P_1 - P_2)^2 = P_1^2 - P_1 P_2 - P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 - P_2 + P_2 = P_1 - P_2$. Verder is $(P_1 - P_2)^* = P_1^* - P_2^* = P_1 - P_2$˙(4)⇒(5) Want als $P_1 - P_2$ een projector is, dan is $P_1 - P_2 \geq 0$ dus $P_1 \geq P_2$.
(5)⇒(2) Want zij $P_1 \geq P_2$, dan is $I - P_1 \leq I - P_2$. Voor elke $z \in H$ is dus $\|(I - P_1) P_2 z\| \leq \|(1 - P_2) P_2 z\| = \|P_2 z - P_2^2 z\| = 0$. dus $(I - P_1) P_2 z = 0$. Dus $(I - P_1) P_2 = 0$ ofwel $P_2 = P_1 P_2$.
Hiermee is de equivalentie van de 5 beweringen bewezen. □

Stelling 3.9.27 (**Pythagoras in oneindig veel dimensies**)**.** Zij H een Hilbertruimte en laten $H_1, H_2, \ldots$ gesloten lineaire deelruimten van H zijn. Onderstel:
(1) de H_k staan twee aan twee loodrecht op elkaar.
(2) het volledig lineair omhulsel der H_k is H, dwz het lineair omhulsel der H_k, bestaande uit alle eindige sommen $z_1 + z_2 + \cdots + z_k$, met $z_i \in H_i$ voor $i - 1, 2, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$ willekeurig, ligt dicht in H. Dan geldt, Als we schrijven $P_k = P_{H_k}$, $(k = 1, 2, \ldots)$:
(1.) Als $z_k \in H_k$, met $k \in \mathbb{N}$ en $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|^2 < \infty$ dan convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ naar een element $z \in H$. Daarbij geldt verder $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ P_k z = z_k$.
(2.) Voor elk element $z \in H$ is $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|^2 < \infty$. Tevens is

$$\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k z\|^2 \quad \text{en} \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} P_k z \ .$$

Gevolg 3.9.28. H bestaat juist uit de elementen z van de vorm $z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ met $z_k \in H_k$, $k \in \mathbb{N}$, en $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|^2 < \infty$. Dit is ten dele een generalisatie van de resultaten in sectie 3.7.3.

Bewijs:
(1) zij $z_k \in H_k$ $(k \in \mathbb{N})$ en $\sum \|z_k\|^2 < \infty$. Dan is $\sum z_k$ een fundamentaalrij wegens

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right\|^2 \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|z_k\|^2 \ .$$

Dus convergeert $\sum z_k$ naar een element $z \in H$. Tevens is

$$P_k z = P_k \lim_{n\to\infty} (z_1 + \cdots + z_n) = \lim_{n\to\infty} P_k(z_1 + \cdots + z_n) = z_k \ ,$$

omdat P_k een continue operator is en $P_k z_i = 0$ voor $i \neq k$ en $P_k z_k = z_k$.
(2) Zij $z \in H$ en zij y_k een willekeurig element van H_k voor $k \in \mathbb{N}$. Bij gegeven z en gegeven k is $\|z - \sum_{i=1}^{k} y_i\|$ minimaal als

$$z - \sum_{i=1}^{k} y_i \ \perp \ H_1, \ldots, H_k \ .$$

Het laatste is het geval als we nemen $y_i = P_i z = z_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Daarbij is

$$\begin{aligned} \left\| z - \sum_{i=1}^{k} z_i \right\| &= \left\langle z - \sum_{i=1}^{k} z_i \ , \ z - \sum_{i=1}^{k} z_i \right\rangle = \left\langle z - \sum_{i=1}^{k} z_i \ , \ z \right\rangle = \\ &= \|z\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \langle z_i, z\rangle = \|z\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \|z_i\|^2 \ . \end{aligned}$$

Dus $\|z\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \|z_i\|^2 \geq 0$ voor alle k. Dus de reeks $\sum \|z_k\|^2$, dwz de reeks $\sum \|P_k z\|^2$ convergeert. Wegens (1) convergeert nu $\sum z_k$, stel naar y. Daarbij is $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ \ P_k y = z_k = P_k z$. Dus $y - z$ staat loodrecht op alle H_k, dus $y = z$.
Tenslotte is $\left\|\sum_{i=1}^{k} z_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|z_i\|^2$. Door limietovergang volgt $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|z_i\|^2$. $\square$

3.9.5 Compacte operatoren in Hilbertruimten

Compacte verzamelingen

Definitie 3.9.29 (compacte verzameling). Een verzameling in een metrische ruimte R heet *compact* [21] als iedere oneindige deelverzameling tenminste één limietpunt (verdichtingspunt) heeft in R.

Definitie 3.9.30 (relatief compacte verzameling). Een deelverzameling $V \subset R$ van een metrische ruimte T heet *relatief compact* [22] als haar afsluiting in R compact is.

Stelling 3.9.31 (stelling van de politieagenten). Zij R een metrische ruimte en $A \subset R$, dan geldt: als A relatief compact is, dan bestaan er bij elke $\varepsilon > 0$ eindig veel punten $x_, \dots, x_k \in R$ zodat A wordt overdekt door de ε-omgevingen $U_\varepsilon(x_1), \dots, U_\varepsilon(x_k)$.
Is R volledig, dan geldt ook het omgekeerde.
BEWIJS: Deze stelling houdt in dat voor een metrische ruimte de begrippen *rijtjes-compact* en *compact* equivalent zijn. Dit bewijs hoort thuis in de topologie. Zie daarvoor bijvoorbeeld W.J.Pervin [13]. □

Opmerking 3.9.32. In de voorwaarde kunnen we ons beperken tot het geval dat de punten $x_1, \dots, x_k$ alle tot A behoren. Immers zij $\varepsilon > 0$ en A overdekt door $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1), U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2), \dots, U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_k)$. Laten we $\varepsilon/2$-bollen weg die geen punt met A gemeen hebben, en kiezen we in de overblijvende bollen punten $y_1, \dots, y_k \in A$ dan wordt A overdekt door $U_\varepsilon(y_1), \dots, U_\varepsilon(y_k)$.

Compacte operatoren

Definitie 3.9.33 (compacte operator). Een lineaire operator $K : H \to H$ op een Hilbertruimte H heet *compact* als geldt: voor elke begrensde rij (x_n) heeft de rij (Kx_n) een convergente deelrij.

Triviale eigenschappen zijn (met K en T lineaire operatoren op H):
(1) Is K compact, dan is K begrensd.
Want als K niet begrensd is dan is er een rij (x_n) met $\|x_n\| = 1$ en $\|Kx_n\| \geq n$, $(n \in \mathbb{N})$; de rij (Kx_n) heeft dan geen convergente deelrij.
(2) is K compact en T begrensd, dan zijn KT en TK compact.
Immers: als (x_n) begrensd, dan is (Tx_n) begrensd, als (Kx_{n_i}) convergent, dan is (TKx_{n_i}) convergent.
We merken op dat de eenheidsoperator in een oneindig-dimensionale Hilbertruimte H begrensd en niet compact is; immers een oneindig orthonormaal stelsel in H is begrensd, maar heeft heen convergente deelrij.

Stelling 3.9.34. Zij $K : H \to H$ een lineaire operator op een Hilbertruimte H. Als K begrensd en K^*K compact is, dan is K compact.
BEWIJS: Neem een willekeurig begrensde rij (x_n). Dan heeft (K^*Kx_n) een convergente deelrij. Door (x_n) te vervangen door een geschikte deelrij kunnen we dus bereiken dat (K^*Kx_n) convergent is. We hebben dan

$$\|Kx_n - Kx_m\|^2 = \langle K(x_n - x_m), K(x_n - x_m)\rangle = \langle K^*K(x_n - x_m), x_n - x_m\rangle \to 0$$

[21] In algemene topologische ruimten heet een verzameling *compact* als iedere overdekking een eindige deeloverdekking heeft. Een verzameling heet dan *rijtjes-compact* als iedere oneindige deelverzameling tenminste één limietpunt heeft. Voor metrische ruimten zijn beide definities equivalent

[22] Meer algemeen: een deelverzameling V van een topologische ruimte X heet *relatief compact* als haar topologische afsluiting in X compact is.

voor $n, m \to \infty$, omdat de eerste component tot 0 nadert en de tweede begrensd is. Dus is (Kx_n) convergent. Daarmee is bewezen dat K compact is. □

Gevolg 3.9.35. Is K compact, dan is ook K^* compact.
BEWIJS: K^* is begrensd omdat K begrensd is. Dan is KK^* compact. Dus $(K^*)^*K^*$ is compact. Wegens de stelling is dan K^* compact. □

Definitie 3.9.36 (operator van eindige rang). Een lineaire operator $K : H \to H$ heet *van eindige rang* als de beeldverzameling KH eindig-dimensionaal is (Deze beeldverzameling is altijd een lineaire deelruimte van H.)

Stelling 3.9.37. Zij $K : H \to H$ een lineaire operator op H. Als dat K begrensd is èn van eindige rang, dan is K compact.
BEWIJS: Is (x_n) een begrensde rij, dan is (Kx_n) een begrensde rij in een eindig-dimensionale deelruimte en heeft dus een convergente deelrij. □

Opmerking 3.9.38. Een lineaire operator van eindige rang is niet noodzakelijk begrensd. een lineaire operator op een eindig-dimensionale Hilbertruimte is zowel begrensd als van eindige rang.

Stelling 3.9.39. Een lineaire operator $K : H \to H$ is compact desda elke begrensde verzameling door K wordt overgevoerd in een relatief compacte verzameling. Of ook: met E de eenheidsbol, K is compact als KE een relatief compacte verzameling is in H.
BEWIJS: Zij $K : H \to H$ een compacte lineaire operator en zij A een begrensde verzameling in H. Voor elke oneindige rij (x_n) in A heeft dan (Kx_n) een convergente deelrij. Maw elke oneindige rij in de beeldverzameling KA heeft een convergente deelrij. Dan is KA relatief compact Deze redenering is om te keren. □

Stelling 3.9.40. Laten K, K_n $(n \in \mathbb{N})$ lineaire operatoren op H zijn. Zij K begrensd en K_n compact voor $n \in \mathbb{N}$. Zij verder $\|K - K_n\| \to 0$ voor $n \to \infty$. Dan is ook K compact.
BEWIJS: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Zij E de eenheidsbol en N een index zodat $n > N \;\Rightarrow\; \|K - K_n\| < \varepsilon/2$. We gebruiken Stelling 3.9.31. Er zijn eindig veel punten $x_k, \ldots, x_k$ zodat K_nE wordt overdekt door bollen $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1), U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2), \ldots, U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_k)$. Voor $x \in E$ is $\|Kx - K_nx\| < \varepsilon/2$ en behoort dus Kx tot een de bollen $U_\varepsilon(x_i)$. Dus KE wordt overdekt door eindig veel bollen $U_\varepsilon(x_i)$. Dus KE is relatief compact. Dus K is compact. □

Eigenschappen van symmetrische operatoren

Er zijn algemenere voorbeelden van compacte operatoren. We beschouwen speciaal compacte symmetrische operatoren. We zullen uiteindelijk de belangrijke *ontbindingsstelling voor compacte symmetrische operatoren* bewijzen, die betrekking heeft op de eigenwaarden en eigenvectoren van de operator. We geven daarvoor hier eerst een definitie.

Definitie 3.9.41 (eigenwaarden, eigenvectoren). Een getal $\lambda \in \mathbb{C}$ heet *eigenwaarde* van een operator $K : H \to H$ op een Hilbertruimte H, als er een element $0 \neq z \in H$ bestaat met $Kz = \lambda z$. Elke $z \in H$ met $Kz = \lambda z$ heet *eigenelement* (of *eigenvector*) behorend bij λ.

We leiden nu eerst een aantal eigenschappen van symmetrische operatoren af, die bekend zijn voor eindig-dimensionale ruimten, Steeds is A een symmetrische (Hermitische) begrensde operator.

Stelling 3.9.42. Zij A een symmetrische begrensde lineaire operator op H. Dan is

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \langle Ax, x \rangle \;.$$

Bewijs: Volgens Stellig 3.9.20 is $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$ reëel voor alle x.
(1) Voor willekeurige $x \in H$ is

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 \; .$$

Dus voor alle x met $\|x\| \leq 1$ is $|Q(x)| \leq \|A\|$. Dan geldt ook $\gamma := \sup_{\|x\|\leq 1} \langle Ax, x\rangle \leq \|A\|$.
(2) Zij $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. Zij verder θ een willekeurig reëel getal en zij $y' = e^{i\theta}y$. Als in Sectie 3.9.3 hebben we

$$\langle Ax, y'\rangle + \langle Ay', x\rangle = \frac{Q(x+y') - Q(x-y')}{2} \; .$$

Nu is $|Q(z)| \leq \gamma$ als $\|z\| \leq 1$. Om homogeniteits-redenen is dan $|Q(x+y')| \leq \gamma\|x+y'\|^2$ en evenzo $|Q(x-y')| \leq \gamma\|x-y'\|^2$. Dus

$$|\langle Ax, y'\rangle + \langle Ay', x\rangle| \leq \frac{\gamma}{2}\left(\|x+y'\|^2 + \|x-y'\|^2\right) = \gamma\left(\|x\|^2 + \|y'\|^2\right)$$

Dus $|\langle Ax, y'\rangle + \langle Ay', x\rangle| \leq 2\gamma$. Nu is $\langle Ax, y'\rangle + \langle Ay', x\rangle = e^{-i\theta}\langle Ax, y\rangle + e^{i\theta}\langle Ay, x\rangle$. Verder is $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle}$. Dus de twee sommanden zijn beide gelijk aan $|\langle Ax, y\rangle|$ als we kiezen $\theta = \arg(\langle Ax, y\rangle)$.
Er volgt $|\langle Ax, y\rangle| \leq \gamma$ voor alle $x, y \in H$ met $\|x\| \leq 1$ en $\|y\| \leq 1$. Kiezen we $y = \frac{Ax}{\|A\|}$, dan is $\langle Ax, y\rangle = \frac{\|Ax\|^2}{\|A\|}$. Dus $\|Ax\|^2 \leq \gamma\|A\|$ voor alle x met $\|x\| \leq 1$. Dus $\|A\|^2 \leq \gamma\|A\|$, ofwel $\|A\| \leq \gamma$.
Nu impliceren (1) en (2) de stelling. □

Stelling 3.9.43. Elke eigenwaarde van A is reëel.
Bewijs: Zij λ een eigenwaarde en $0 \neq x \in H$ een element met $Ax = \lambda x$. Dan is

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$$

Dus is λ reëel. □

Stelling 3.9.44. Zijn x_1, x_2 eigenvectoren bij twee verschillende eigenwaarden λ_1 en λ_2. Dan is $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.
Bewijs:
$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle$. Vanwege $\lambda_1 \neq \lambda_2$ is dus $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. □

Stelling 3.9.45. Zij $G \subset H$ een lineaire deelruimte en G invariant onder A. (Dwz: $AG = G$) Dan is ook $G^\perp$ invariant onder A.
Bewijs: Voor een willekeurige $x \in G$ is ook $Ax \in G$. Zij nu $y \in G^\perp$, dan $\forall_{x\in G}\;\; 0 = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Dus is $Ay \in G^\perp$. Dus $G^\perp$ is invariant onder A. □

Stelling 3.9.46. Zij K een compacte symmetrische lineaire operator op H. Dan heeft K een eigenwaarde λ met $|\lambda| = \|K\|$. Deze eigenwaarde is -absoluut genomen- de grootste eigenwaarde van K.
Bewijs: Dat K geen eigenwaarde λ heeft met $|\lambda| > \|K\|$, volgt uit het feit dat steeds $|\lambda|\;\|x\| = \|\lambda\, x\| = \|Kx\| \leq \|K\| \cdot \|x\|$.

We bewijzen nu het bestaan van een eigenwaarde λ met $|\lambda| = \|K\|$. We mogen aannemen dat $\|K\| \neq 0$. We hebben $\|K\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Kx, x\rangle|$. Natuurlijk is ook $\|K\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Kx, x\rangle|$ Verder is $\langle Kx, x\rangle$ steeds reëel (Stelling 3.9.42 en 3.9.20). Er bestaat dus een rij (x_n) met

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;\; \|x_n\| = 1 \qquad \langle Kx_n, x_n\rangle \to \pm\|K\| \;\text{ voor }\; n \to \infty \; ,$$

voor één de beide tekens. Door zo nodig K door $-K$ te vervangen is te bereiken dat $\langle Kx_n, x_n\rangle \to \|K\|$. Omdat de rij (x_n) begrensd is en K compact is, bestaat er een deelrij (x_{n_i}) zodat (Kx_{n_i}) convergeert. We mogen aannemen dat de reeks (Kx_n) al convergeert, stel naar y.

Stel nu $\mu = \|K\|$. Dan is

$$\begin{aligned} \|Kx_n - \mu x_n\|^2 &= \langle Kx_n, Kx_n\rangle - 2\mu \langle Kx_n, x_n\rangle + \mu^2 \langle x_n, x_n\rangle \\ &\to \|y\|^2 - 2\mu\, \|K\| + \mu^2 \; = \|y\|^2 - \mu^2 \quad \text{voor} \quad n \to \infty\ . \end{aligned}$$

Dus $\|y\|^2 - \mu^2 \geq 0$, $\|y\| \geq \mu$. Anderzijds is $\|Kx_n\| \leq \|K\|\|x_n\| = \mu$ voor alle n, dus $\|y\| \leq \mu$.
Dus $|y\| = \mu$. Dit heeft twee gevolgen:
(a) Wegens $K \neq 0$ is $\|K\| > 0$. Dus $\|y\| > 0$, dus $y \neq 0$.
(b) $\|Kx_n - \mu x_n\| \to 0$ voor $n \to \infty$.
Dus $\mu x_n \to y$ voor $n \to \infty$. Uit $Kx_n - \mu x_n \to 0$ volgt dan $K(\frac{y}{\mu}) - y = 0$, ofwel $Ky = \mu y$.
De beweringen (a) en (b) houden in dat μ eigenwaarde is van K. Daarmee is de stelling bewezen. $\square$

Stelling 3.9.47. Zij K een compacte symmetrische lineaire operator op H. Zij verder $\varepsilon > 0$. Dan zijn er slechts eindig veel eigenvectoren $x_1, \ldots, x_k$ zodat geldt:
(1) x_i is een eigenvector bij een eigenwaarde λ_i met $|\lambda_i| \geq \varepsilon$, $(i = 1, \ldots, k)$.
(2) $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ als $i \neq j$.
Bewijs: Stel dat er een oneindige rij vectoren $x_1, x_2, \ldots$ is met de eigenschappen (1) en (2). We normeren de vectoren x_i zodat $\|x_i\| = 1$ voor alle i, dan is (x_i) een begrensde rij. Verder is voor $i \neq j$

$$\|Kx_i - Kx_j\| = \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\| \geq \varepsilon\sqrt{2}\ .$$

Dan heeft de rij (Kx_i) geen convergente deelrij. We krijgen dus een tegenspraak. $\square$

Gevolg 3.9.48. Bij een vaste eigenwaarde $\neq 0$ zijn er ten hoogste eindig veel onafhankelijke eigenvectoren.

Gevolg 3.9.49. Als er oneindig veel eigenwaarden zijn, dan vormen deze een rij die tot 0 nadert

De ontbindingsstelling voor compacte symmetrische operatoren

Stelling 3.9.50 (Ontbindingsstelling voor compacte symmetrische operatoren). Zij $K : H \to H$ een begrensde lineaire operator op de Hilbertruimte H, dan geldt: K is compact en symmetrisch desda een afbrekende of oneindige rij eindig-dimensionale deelruimten $H_1, H_2, \ldots$ van H en een bijbehorende rij van reële getallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bestaan zodat geldt:
(1) Voor iedere λ_k en bijbehorende H_k geldt $\forall_{z\in H_k}\ Kz = \lambda_k z$.
(2) $\lambda_k \neq 0$ voor alle k. Is de rij oneindig, dan is bovendien $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.
(3) H_k is eindig-dimensionaal.
(4) De deelruimten H_k zijn onderling loodrecht.
(5) Met N het orthoplement van het gesloten lineair omhulsel der H_k, geldt $\forall_{z\in N}\ Kz = 0$.
Bewijs: K is een begrensde lineaire operator op H.
Eerste helft: We laten eerst zien dat uit (1) tem (5) volgt dat K compact en symmetrisch is.

We stellen $H_0 = N$ en $\lambda_0 = 0$. Dan zijn $H_0, H_1, H_2, \ldots$ gesloten lineaire deelruimten van H, twee aan twee loodrecht en met gesloten lineair omhulsel H. Zij z een willekeurig punt van H. Wegens stelling 3.9.27 kunnen we schrijven $z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$, waarbij z_k de projectie is van z op H_k. Volgens het gegeven geldt $\forall_k\ Kz_k = \lambda_k z$. Omdat K een continue lineaire operator is, hebben we nu

$$\begin{aligned}
Kz &= K \lim_{n\to\infty}(z_0 + z_1 + \cdots + z_n)\\
&= \lim_{n\to\infty} K(z_0 + z_1 + \cdots + z_n)\\
&= \lim_{n\to\infty}(Kz_0 + Kz_1 + \cdots + Kz_n)\\
&= \lim_{n\to\infty}(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_k \ .
\end{aligned}$$

De convergentie van de laatste reeks volgt uit de herleiding alsook uit de convergentie van de reeks $\sum \|\lambda_k z_k\|^2$ die weer berust op de convergentie van $\sum \|z_k\|^2$ en de relatie $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Uit het resultaat volgt direct ivm de realiteit van de getallen λ_k dat algemeen $\langle Ky, z\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_k y_k = \langle y, Kz\rangle$. Dus K is symmetrisch.

Om te bewijzen dat K compact is nemen we een natuurlijk getal N en definiëren K_N door $K_N z = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k z_k$. Dan is K_N begrensd en van eindige rang:

$$\|K_N z\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|\lambda_k z_k\|^2 \le C\ \|z\|^2\ ,$$

met $C = \sup |\lambda_k|^2$. Wegens Stelling 3.9.37 is dan K_N compact.

Zij nu $\varepsilon > 0$ willekeurig en zij N_ε zo gekozen dat $k > N_\varepsilon \Rightarrow |\lambda_k| \le \varepsilon$. Voor willekeurige z is dan

$$\begin{aligned}
\|(K - K_{N_\varepsilon})z\|^2 &= \left\| \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \lambda_k z_k \right\|^2 \le \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \|\lambda_k z_k\|^2\\
&\le \varepsilon^2 \cdot \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \|z_k\|^2 \le \varepsilon^2 \cdot \|z\|^2
\end{aligned}$$

Dus $\|K - K_{N_\varepsilon}\| \le \varepsilon$. Uit Stelling 3.9.40 volgt nu dat K compact is.

Tweede helft: Bij het bewijs van de andere helft van Stelling 3.9.50 moeten we de volgende punten afhandelen, gegeven is dat K een compacte symmetrische lineaire operator op H is.
(1) er is een eigenwaarde
(2) alle eigenwaarden zijn reëel.
(3) eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden staan loodrecht op elkaar.
(4) bij elke eigenwaarde $\neq 0$ bestaan er hoogstens eindig veel onafhankelijke eigenvectoren.
(5) als er oneindig veel eigenwaarden zijn dan naderen deze tot 0.
(6) als G het gesloten lineair omhulsel is van alle eigenvectoren behorende bij eigenwaarden $\neq 0$, dan is $K = 0$ op $G^\perp$.

Als $K = 0$ is de bewering triviaal. We nemen daarom aan dat $K \neq 0$. Uit Stelling 3.9.46 volgt dat λ_1 met $|\lambda_1| = \|K\|$ een eigenwaarde is. Volgens Stelling 3.9.43 is λ_1 reëel en volgens Stelling 3.9.47 is H_1 de ruimte der eigenvectoren bij λ_1 eindig-dimensionaal.
Volgens Stelling 3.9.45 is nu het orthoplement $H_1^\perp$ invariant onder K. Zij K_1 de restrictie van K tot $H_1^\perp$. Dan is K_1 een compacte symmetrische operator op $H_1^\perp$. Dus, er is een reële eigenwaarde λ_2 van K_1 met $|\lambda_2| = \|K_1\|$, met bijbehorende eigenruimte H_2. We beperken nu K_1 tot $(H_1 \oplus H_2)^\perp = H_1^\perp \cap H_2^\perp$. Enz.. Er zijn nu twee mogelijkheden:
(a) Het proces breekt af doordat H eindig-dimensionaal is of $K = 0$ is op $(H_1 \oplus \cdots \oplus H_n)^\perp$ voor

zekere n.
(b) Het proces kan onbepaald voortgezet worden. In dat geval naderen de getallen λ_k tot 0 wegens Gevolg 3.9.49 van Stelling 3.9.47.
In beide gevallen geldt dat de H_k eindig-dimensionaal zijn en twee-aan-twee loodrecht zijn wegens Stelling 3.9.47. Op het orthoplement der H_k is K identiek 0, omdat er anders een nieuwe eigenvector bij een eigenwaarde $\neq 0$ zou bestaan. Deze zou behoren tot één der H_k.
Daarmee is alles aangetoond. □

Opmerking 3.9.51. De werking van een compacte symmetrische lineaire operator kan dus geschreven worden als

$$Kz = \sum \lambda_k z_k \qquad \text{waarbij} \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}\,,\ \text{en } z_k \in H_k\ . \tag{3.29}$$

Een inproduct $\langle z, y\rangle$ kan geschreven worden als

$$\langle z, y\rangle = \sum \lambda_k z_k y_k \qquad \text{met} \quad z_k = P_k z, y_k = P_k y\ ,$$

waarin P_k de projectie in H op H_k weergeeft.

Opmerking 3.9.52. We merken op dat, als H oneindig-dimensionaal is, het beeld onder een compacte symmetrische lineaire operator K niet de gehele ruimte is.
Bewijs: We gaan uit van de vorm beschreven (3.29). We mogen aannemen dat $N = \{0\}$. Voor $z = \sum_0^\infty z_k$, $z_k \in H_k$ is $Kz = \sum_1^\infty \lambda_k z_k$. Dus KH bestaat uit de punten $\sum \lambda_k z_k$ met $\sum \|z_k\|^2 < \infty$.

De verzameling van de genoemde punten $\sum \lambda_k z_k$ omvat in elk geval het lineaire omhulsel der H_k maar is echt kleiner dan het gesloten lineair omhulsel der H_k want er zijn rijen (z_k) waarbij $\sum z_k$ niet convergeert en $\sum \lambda_k z_k$ wel. □

Opmerking 3.9.53. Betreffende de verzameling KE, E de eenheidsbol in H, kunnen we het volgende zeggen. KE bestaat uit de punten $\sum \lambda_k z_k$ met $\sum \|z_k\|^2 \leq 1$ en is dus oneindig-dimensionaal (vooropgesteld dat het aantal indices k oneindig is). Toch is KE een relatief compacte verzameling.